

ỦY BAN NHÂN DÂN THÀNH PHỐ HỒ CHÍ MINH
TRƯỜNG CAO ĐẲNG LÝ TỰ TRỌNG THÀNH PHỐ HỒ CHÍ MINH



GIÁO TRÌNH TOÁN 1

NGÀNH: Dùng cho các ngành đào tạo

BẬC: Trung cấp chuyên nghiệp

Cao đẳng nghề

Tài liệu lưu hành nội bộ

Thành phố Hồ Chí Minh, tháng 08 năm 2018

∞ PHẦN ĐẠI SỐ ∞**MỤC LỤC****trang****Chương I. MỆNH ĐỀ - TẬP HỢP**

§1. Mệnh đề	3
§2. Tập hợp	5
§3. Các phép toán tập hợp	7
§ 4. Các tập hợp số	8
§5. Số gần đúng. Sai số	10

Chương II. HÀM SỐ BẬC NHẤT VÀ BẬC HAI

§1. Hàm số.....	13
§2. Hàm số $y = ax + b$	17
§3. Hàm số bậc hai.....	20

Chương III. PHƯƠNG TRÌNH. HỆ PHƯƠNG TRÌNH

§1. Đại cương về phương trình.....	24
§2. Phương trình quy về phương trình bậc nhất, bậc hai.....	26
§3. Phương trình và hệ phương trình bậc nhất nhiều ẩn.....	29

CHƯƠNG I. MỆNH ĐỀ - TẬP HỢP

§1. MỆNH ĐỀ

I. KIẾN THỨC CƠ BẢN

1. Khái niệm mệnh đề

Mỗi mệnh đề là một câu khẳng định hoặc đúng, hoặc sai.

Một mệnh đề không thể vừa đúng, vừa sai.

Ví dụ 1: “Số π lớn hơn 4” (là một mệnh đề sai)

2. Các loại mệnh đề. Cho 2 mệnh đề P và Q

- **Mệnh đề phủ định của P:** kí hiệu $\bar{P}$ (không P)

Nếu P đúng thì $\bar{P}$ sai và ngược lại

- **Mệnh đề kéo theo:** kí hiệu $P \Rightarrow Q$ (nếu P thì Q)

Mệnh đề $P \Rightarrow Q$ chỉ sai khi P đúng và Q sai

- **Mệnh đề đảo:**

Mệnh đề $Q \Rightarrow P$ là mệnh đề đảo của mệnh đề $P \Rightarrow Q$

- **Mệnh đề tương đương:** kí hiệu $P \Leftrightarrow Q$

Mệnh đề $P \Leftrightarrow Q$ đúng khi P và Q cùng đúng hoặc cùng

3. Mệnh đề chứa biến

- Là câu khẳng định mà tính đúng sai còn tùy thuộc vào mỗi giá trị cụ thể của biến.
- Khi gắn thêm kí hiệu: $\forall$ (với mọi); $\exists$ (tồn tại) thì được một mệnh đề.

Ví dụ 2: Xét $P(x) = “x - 5 < 6”$ là mệnh đề chứa biến. Khi chọn $x = 1$ có

$P(1) = “1 - 5 < 6$ (đúng), $x = 15$ có $P(15) = “15 - 5 < 6”$ (sai).

Gắn thêm kí hiệu: $\exists$, “ $\exists x \in \mathbb{R}, x - 5 < 6$ ” là mệnh đề đúng

$\forall$, “ $\forall x \in \mathbb{R}, x - 5 < 6$ ” là mệnh đề sai.

❖ **Chú ý:**

☞ Phủ định của “ $\forall x \in X, P(x)$ ” là: “ $\exists x \in X, \overline{P(x)}$ ”

☞ Phủ định của “ $\exists x \in X, P(x)$ ” là: “ $\forall x \in X, \overline{P(x)}$ ”

II. BÀI TẬP ÁP DỤNG

Bài 1. Trong các câu sau, câu nào là mệnh đề:

a/ “Phương trình: $x^2 + 4x + 5 = 0$ có nghiệm”

b/ “ $x^2 > x$ ”

c/ “Hình chữ nhật là hình bình hành có 2 đường chéo bằng nhau”

Giải

a/ Mệnh đề sai: vì $\Delta' = -1 < 0$ nên phương trình không có nghiệm

b/ Không là mệnh đề: vì với $x = 2$ có $4 > 2$ (đúng); với $x = 1$ có $1 > 1$ (sai)

$\Rightarrow$ Khẳng định vừa đúng, vừa sai.

c/ Mệnh đề đúng (theo dấu hiệu nhận biết hình chữ nhật).

Bài 2. Lập mệnh đề phủ định của các mệnh đề:

a/ $A = "2008 \text{ chia hết cho } 9"$

b/ $B = "\forall x \in \mathbb{R}, x^2 > x"$

c/ $C = "\exists n \in \mathbb{N}, n^2 = 3n - 2"$

Giải:

a/ $\bar{A} = "2008 \text{ không chia hết cho } 9"$

b/ $\bar{B} = "\exists x \in \mathbb{R}, x^2 \leq x"$

c/ $\bar{C} = "\forall n \in \mathbb{N}, n^2 \neq 3n - 2"$.

Bài 3. Cho mệnh đề $P = "\Delta ABC = \Delta A'B'C'"$ và mệnh đề $Q = "\Delta ABC \sim \Delta A'B'C'"$.

Lập mệnh đề " $P \Rightarrow Q$ ", " $Q \Rightarrow P$ " và cho biết mỗi mệnh đề vừa lập đúng hay sai?

Giải

- $(P \Rightarrow Q)$: "Nếu $\Delta ABC = \Delta A'B'C'$ thì $\Delta ABC \sim \Delta A'B'C'$ " đây là mệnh đề đúng
- $(Q \Rightarrow P)$: "Nếu $\Delta ABC \sim \Delta A'B'C'$ thì $\Delta ABC = \Delta A'B'C'$ " đây là mệnh đề sai.

BÀI TẬP

Bài 1. Khẳng định nào là mệnh đề? Nếu là mệnh đề, cho biết đúng hay sai:

a/ $3 + 2 = 7$

b/ $\pi < 3,15$

c/ $|-5| = 5$

d/ $4 + x > 3$

e/ Năm 2008 là năm nhuận

f/ Lớp chúng ta rất chăm học Toán.

Bài 2. Trong các câu sau câu nào là mệnh đề, câu nào là mệnh đề chứa biến:

a/ $x + y \geq 1$

b/ $2 - \sqrt{5} \leq 0$

c/ $x^2 + 1 = 0$

c/ $\sqrt{2}$ là số hữu tỉ.

Bài 3. Xét tính đúng sai của mệnh đề phủ định các mệnh đề sau :

a/ $A = "\forall x \in \mathbb{R}, x + 3 < 2"$

b/ $B = "\forall n \in \mathbb{N}, n^2 = 4n - 3"$

c/ $C = "\exists x \in \mathbb{Q}, x^2 = 3"$

d/ $D = "\exists x \in \mathbb{Z}, x \leq \frac{1}{x}"$

Bài 4. Dùng các kí hiệu $\forall, \exists$ để viết các mệnh đề:

a/ Bình phương của mỗi số nguyên đều lớn hơn chính nó

b/ Mọi số nguyên tố đều là số lẻ

c/ Có số hữu tỉ mà bình phương của nó bằng 5

d/ Có số thực mà số đối bằng với số nghịch đảo của nó

Bài 5. Cho mệnh đề $P = "\Delta ABC$ cân tại A" và $Q = "\Delta ABC$ có $B = C"$.

Hãy lập các mệnh đề $P \Rightarrow Q$, $Q \Rightarrow P$ và $P \Leftrightarrow Q$.

Bài 6. Cho mệnh đề chứa biến $P(x)$: " $x = x^4$ " với x là số nguyên. Xác định tính đúng sai của các mệnh đề sau

a/ $P(1)$

b/ $P\left(\frac{-1}{2}\right)$

c/ $\exists x \in \mathbb{Z}, P(x)$

d/ $\forall x \in \mathbb{R}, P(x)$

☞ **Gợi ý:** a/ $P(1)$: " $1 = 1^4$ "

b/ Tương tự a

c/ $\exists x \in \mathbb{Z}, x = x^4$

d/ Tương tự c

§ 2. TẬP HỢP

I. KIẾN THỨC CƠ BẢN

1. Các khái niệm

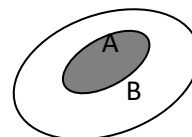
Tập hợp là một khái niệm toán học, nó chứa một nhóm phần tử có chung một hay vài tính chất nào đó.

Nếu m là phần tử của tập hợp A ta viết: $m \in A$.

Tập hợp thường được biểu diễn dưới dạng: nêu tính chất hay liệt kê phần tử.

- **Tập con:** Tập A được gọi là tập con của tập B nếu mọi phần tử của tập A đều thuộc tập B .

$$A \subset B \Leftrightarrow (\forall x, x \in A \Rightarrow x \in B)$$



- **Tập hợp bằng nhau:**

$$A = B \Leftrightarrow A \subset B \text{ và } B \subset A$$

- **Tập rỗng**

$\emptyset$: Tập không có phần tử.

Ví dụ 1: Liệt kê các phần tử của tập $A = \{x \in \mathbb{R} \mid x^2 + 1 = 0\}$

Phương trình: $x^2 + 1 = 0$ vô nghiệm nên tập nghiệm của phương trình $S = \emptyset$.

II. BÀI TẬP ÁP DỤNG

Bài 1. Hãy liệt kê phần tử của tập hợp $A = \{x \in \mathbb{Z} \mid (2x-1)(x^2-3x-4)=0\}$

Giải

$$\text{Ta có pt: } (2x-1)(x^2-3x-4)=0 \Leftrightarrow \begin{cases} 2x-1=0 \\ x^2-3x-4=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=\frac{1}{2} \\ x=-1 \cup x=4 \end{cases}$$

Vì $x \in \mathbb{Z}$ nên $A = \{-1; 4\}$.

Bài 2. Tìm tất cả các tập con của tập $A = \{a; b; c\}$

Giải

Các tập con của A là:

$$\emptyset; \{a\}; \{b\}; \{c\}$$

$$\{a; b\}; \{a; c\}; \{b; c\}; A$$

BÀI TẬP**Bài 1.** Viết các tập hợp sau dưới dạng liệt kê phần tử:

$$A = \{x \in \mathbb{N} \mid (x^2 - 4)(x^2 - 5x + 4) = 0\} \quad B = \{x \in \mathbb{Q} \mid (2x - \sqrt{3})(3x^2 - 2x) = 0\}$$

$$C = \{x \in \mathbb{Z} \mid 3x^3 + 2x^2 - 5x = 0\} \quad D = \{x \in \mathbb{R} \mid (2x - 1)(x^2 + x + 1) = 0\}$$

$$E = \{x \in \mathbb{N} \mid 2x - 1 \leq 7\} \quad F = \{x \in \mathbb{Z} \mid |x| < 3\}$$

Bài 2. Cho các tập hợp:

$$A = \{x \in \mathbb{R} \mid x^2 - 2x + 5 = 0\} \quad B = \{x \in \mathbb{N} \mid 3 - x > 0\}$$

$$C = \{x \in \mathbb{Q} \mid x^2 - 2 = 0\} \quad D = \{x \in \mathbb{Z} \mid 0 \leq x \leq 3\}$$

a) Tập nào là tập rỗng?

b) Tìm quan hệ tập con, bằng nhau giữa các tập hợp trên.

Bài 3. Tìm tất cả các tập hợp con của mỗi tập hợp sau:

$$\text{a) } A = \{-1; 0; 1\} \quad B = \{T; O; A; N\} \quad C = \{x \in \mathbb{R} \mid x^4 - 5x^2 + 4 = 0\}$$

Bài 4: Xác định quan hệ tập con giữa các tập hợp sau:

$$A = \{x \mid x \text{ là hình thang cân}\} \quad B = \{x \mid x \text{ là hình bình hành}\}$$

$$C = \{x \mid x \text{ là hình chữ nhật}\} \quad D = \{x \mid x \text{ là hình thoi}\};$$

$$E = \{x \mid x \text{ là hình vuông}\}$$

§3. CÁC PHÉP TOÁN TẬP HỢP

I. KIẾN THỨC CƠ BẢN

1. Phép hợp:

$$A \cup B = \{x \mid x \in A \text{ hay } x \in B\}$$

2. Phép giao:

$$A \cap B = \{x \mid x \in A \text{ và } x \in B\}$$

3. Phép hiệu:

$$A \setminus B = \{x \mid x \in A \text{ và } x \notin B\}$$

4. Phần bù: Khi $A \subset E$, $C_E A = E \setminus A$

II. BÀI TẬP ÁP DỤNG

Bài 1. Cho $A = \{-1; 3; -5; 7; -9; 11; -13; 15\}$ và $B = \{0; 3; 6; 9; 12; 15; 17\}$.Xác định: $A \cap B$, $A \cup B$, $A \setminus B$, $B \setminus A$.**Giải**

$$A \cap B = \{3; 15\};$$

$$A \cup B = \{-1; 3; -5; 7; -9; 11; -13; 15; 0; 6; 9; 12; 17\}$$

$$A \setminus B = \{-1; -5; 7; -9; 11; -13\}; \quad B \setminus A = \{0; 6; 9; 12; 17\}$$

BÀI TẬP**Bài 1.** Cho $D = \{0; 1; 2; 3; 4; 5\}$; $E = \{0; 2; 4; 6\}$; $F = \{0; 3; 6; 9; 12\}$ a) Xác định $D \cap E$; $E \cup F$; $F \cap D$;b) Xác định $E \setminus F$; $D \setminus E$; $F \setminus D$;c) Xác định $(D \cup F) \setminus E$; $(E \cap F) \cup D$; $(E \setminus D) \cap F$.**Bài 2.** a/ Xác định các tập hợp $C_{\mathbb{R}} A$ và $C_{\mathbb{R}} B$ với

$$A = \{x \in \mathbb{R} \mid x^2 - 4x - 5 = 0\}; \quad B = \{x \in \mathbb{R} \mid 4 - 5x \geq 0\}$$

b/ Xác định các tập hợp: $E = \{x \in \mathbb{R} \mid 2x^2 - 5x + 2 \neq 0\}$;

$$F = \{x \in \mathbb{R} \mid x \leq 4 \text{ và } x^2 - 4x + 3 \neq 0\}.$$

Bài 3. Trong số 45 học sinh của lớp 10A có 15 bạn được xếp loại học sinh giỏi, 20 bạn được xếp loại hạnh kiểm tốt, trong đó có 10 bạn vừa học lực giỏi, vừa có hạnh kiểm tốt. Hỏi

a) Lớp 10A có bao nhiêu bạn được khen thưởng, biết rằng muốn được khen thưởng bạn đó phải có học lực giỏi hoặc có hạnh kiểm tốt?

b) Lớp 10A có bao nhiêu bạn chưa được xếp loại học lực giỏi và chưa có hạnh kiểm tốt?

Bài 1. Viết tập hợp A dưới dạng khoảng, đoạn: $A = \{x \in \mathbb{R} \mid 4 - 3x \geq 10\}$

Giải

Ta có: $4 - 3x \geq 10 \Leftrightarrow -3x \geq 6 \Leftrightarrow x \leq -2$

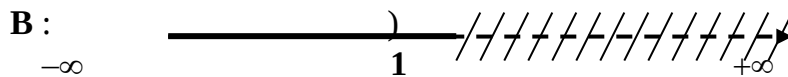
Vì $x \in \mathbb{R}$ nên $B = (-\infty; -2]$

Bài 2. Cho $A = [-1; 3]$ và $B = (-\infty; 1)$.

Xác định: $A \cap B$, $A \cup B$, $A \setminus B$, $B \setminus A$, $C_{\mathbb{R}} B$

Giải

A : 

B : 

$A \cap B = [-1; 1)$; $A \cup B = (-\infty; 3]$; $A \setminus B = [1; 3]$

$B \setminus A = (-\infty; -1)$; $C_{\mathbb{R}} B = [1; +\infty)$

BÀI TẬP

Bài 1. Điền vào chỗ còn trống (...) trong bảng dưới đây:

$2 \leq x < 5$	$x \in [2; 5)$
$-3 < x \leq 2$	$x \in \dots\dots\dots$
$\dots\dots\dots$	$x \in [-1; 7]$
$\dots\dots\dots$	$x \in (-\infty; 3]$
$x > 0$	$x \in \dots\dots\dots$

Bài 2.Viết các tập hợp sau dưới dạng khoảng, đoạn:

a/ $A = \{x \in \mathbb{R} \mid x \leq 3\}$

b/ $B = \{x \in \mathbb{R} \mid 1 < x \leq 3\}$

c/ $C = \{x \in \mathbb{R} \mid 2x - 1 > 0\}$

d/ $D = \{x \in \mathbb{R} \mid |x| \leq 1\}$

e/ $E = \{x \in \mathbb{R} \mid 5 - 4x \leq 0\}$

f/ $F = \{x \in \mathbb{R} \mid x^2 \leq 4\}$

Bài 3. Xác định $A \cap B$; $A \cup B$; $A \setminus B$; $B \setminus A$ với:

a/ $A = (-5; 3)$ và $B = (-7; 0)$

b/ $A = [1; 5]$ và $B = (4, 5; +\infty)$

c/ $A = \{x \in \mathbb{R} \mid -1 < x \leq 5\}$ và $B = \{x \in \mathbb{R} \mid x > 2\}$

d/ $A = \{x \in \mathbb{R} \mid 2x - 1 \leq 0\}$ và $B = \{x \in \mathbb{R} \mid -2 \leq x \leq 3\}$

Bài 4. Cho $A = [x; x+1]$; $B = [2; 5]$

a/ Tìm x để $A \subset B$

b/ Tìm x để $B \subset A$

c/ Tìm x để $A \cap B = \emptyset$

Gợi ý: a/ $A \subset B \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 2 \\ x+1 \leq 5 \end{cases}$

b/ $B \subset A \Leftrightarrow \begin{cases} 2 \geq x \\ 5 \leq x+1 \end{cases}$

c/ $A \cap B = \emptyset \Leftrightarrow \begin{cases} x+1 < 2 \\ x > 5 \end{cases}$

Bài 5. Cho $A = (-\infty; x]$ và $B = (2; +\infty)$

a/ Tìm x để $A \cap B = \emptyset$

b/ Tìm x để $A \cup B = \mathbb{R}$.

§5. SỐ GẦN ĐÚNG. SAI SỐ

I. KIẾN THỨC CƠ BẢN

1. Số gần đúng: Kết quả của đo lường là một số gần đúng. Trong đo đạc, tính toán ta thường chỉ nhận được các số gần đúng.

2. Sai số

a) Sai số tuyệt đối:

$$\Delta_a = |\bar{a} - a|$$

a là số gần đúng của số đúng $\bar{a}$.

Nếu $\Delta_a \leq d$. Khi đó, $\bar{a} \in [a - d; a + d]$. Thường viết: $\bar{a} = a \pm d$

Ta nói: số a có độ chính xác là d

b) Sai số tương đối:

$$\delta_a = \frac{\Delta_a}{|a|}$$

3. Số qui tròn:

❖ Nguyên tắc làm tròn số:

- Qui tròn đến hàng nào thì tất cả các chữ số bên phải hàng đó thay bằng chữ số 0
- Nếu chữ số kế bên phải hàng qui tròn lớn hơn hay bằng 5 thì phải tăng thêm một đơn vị vào hàng qui tròn

☞ **Chú ý:** Độ chính xác của số qui tròn bằng nửa đơn vị của hàng qui tròn.

4. Chữ số chắc

Cho $\bar{a} = a \pm d$. Trong số a các chữ số gọi là chữ số chắc nếu d không vượt quá nửa đơn vị của hàng chứa chữ số đó.

II. BÀI TẬP ÁP DỤNG

Bài 1. a/ Làm tròn số $a = 2389,4615$ đến hàng chục, hàng phần trăm

b/ Viết số qui tròn của số $b = 3,1463$ biết $\bar{b} = 3,1463 \pm 0,001$.

Giải

a/ • Làm tròn đến hàng chục:

Chữ số liền kề bên phải hàng chục là 9 (mà $9 > 5$) nên cộng thêm 1 đơn vị vào hàng chục. Vậy: $a \approx 2390$.

• Làm tròn đến hàng phần trăm:

Chữ số liền kề bên phải hàng phần trăm là 1 (mà $1 < 5$). Vậy: $a \approx 2389,46$. b/ Số b có độ chính xác là 0,001 nên ta làm tròn số b đến hàng phần trăm

Vậy: $b \approx 3,15$

Bài 2. Xác định chữ số chắc của các số sau:

$A = 2,47865 (\pm 0,00312)$

$B = 987123456 (\pm 650)$

Giải

• Có $0,00312 < 0,005 \Rightarrow$ độ chính xác nhỏ hơn nửa đơn vị hàng phần trăm

Mà chữ số hàng phần trăm là 7

Vậy các chữ số chắc của số A là 2 ; 4 ; 7 (gồm 7 và các chữ số bên trái nó)

• Có $650 < 5000 \Rightarrow$ độ chính xác nhỏ hơn nửa đơn vị hàng chục nghìn

Mà chữ số hàng chục nghìn là 2

Vậy các chữ số chắc của số B là 9, 8, 7, 1, 2

Bài 3: Một hình chữ nhật có các cạnh: $x = 4,2m \pm 1cm$; $y = 7m \pm 2cm$.

Chứng minh rằng chu vi P của hình chữ nhật là $P = 22,4m \pm 6cm$.

Giải

Ta có: $P = 2(x + y) \approx 2(4,2 + 7) = 22,4m$

Lại có: $2(1 + 2) = 6cm$

Vậy $P = 22,4m \pm 6cm$

BÀI TẬP

Bài 1. Làm tròn các số sau đây: $a = 9145,76238$; $b = 27394,10075$

a/ Đến hàng đơn vị

b/ Đến hàng phần nghìn

Bài 2. Hãy viết các số gần đúng của $\sqrt{2}$; $\sqrt[3]{5}$ với:

a/ 4 chữ số thập phân

b/ 2 chữ số thập phân

Bài 3. Hãy viết số qui tròn của các số gần đúng x, y biết:

a/ $\bar{x} = 1356,5 (\pm 0,1)$

b/ $\bar{y} = 1357,25 (\pm 0,01)$

Bài 4: a/ Dân số của một tỉnh là $M = 2731425$ (người) ± 200 (người). Hỏi trong số M chữ số nào là chắc?

b/ Chiều dài một cái cầu đo được là $N = 1745,25m \pm 1cm$. Xác định chữ số chắc của N?

c/ Viết các số gần đúng: 2731425; 1745,25 dưới dạng chuẩn

Bài 5: Cho biết độ chính xác của các số gần đúng trong các cách ghi sau:

a/ Giá trị $\sqrt{5} \approx 2,236$

b/ Dân số Việt Nam năm 2005 vào khoảng 83.10^6 người?

TỔNG KẾT CHƯƠNG I

I. KIẾN THỨC CƠ BẢN

1. Mệnh đề: Với hai mệnh đề P và Q

➤ $\bar{P}$: phủ định của P

➤ $P \Rightarrow Q$: mệnh đề kéo theo

➤ $Q \Rightarrow P$: mệnh đề đảo của mệnh đề $P \Rightarrow Q$

➤ $P \Leftrightarrow Q$: mệnh đề tương đương

2. Định lý: là mệnh đề đúng thường có dạng $P \Rightarrow Q$.

(P: giả thiết và Q: kết luận)

Có hai cách chứng minh Định lý: trực tiếp và phản chứng.

3. Tập hợp: • Tập con $A \subset B \Leftrightarrow$ Mọi phần tử của A đều thuộc B

• Các phép tính:

$$A \cap B = \{x \mid x \in A \text{ và } x \in B\}$$

$$A \cup B = \{x \mid x \in A \text{ hay } x \in B\}$$

$$A \setminus B = \{x \mid x \in A \text{ và } x \notin B\}$$

4. Số gần đúng:

$$\bar{a} = a \pm d$$

$\bar{a}$: số đúng;

a: số gần đúng; d: độ chính xác của số gần đúng

- a. Sai số tuyệt đối: $\Delta_a = |\bar{a} - a|$; $\Delta_a \leq d$
- b. Sai số tương đối: $\delta_a = \frac{\Delta_a}{|a|}$
- c. Chữ số trong a được gọi là **chữ số chắc** nếu d không vượt quá nửa đơn vị của hàng chứa chữ số.

BÀI TẬP

Bài 1. Cho các mệnh đề:

$$A = "\exists x \in \mathbb{Q}; x^2 \leq -2x + 3"$$

$$B = "\forall x \in \mathbb{N}^*; x > \frac{1}{x}"$$

$$C = "\exists x \in \mathbb{Z}; n^2 + 1 : 3"$$

$$D = "\forall x \in \mathbb{R}; x^2 - 3x + 5 \neq 0"$$

a/ Hãy xét tính đúng sai của mỗi mệnh đề

b/ Lập mệnh đề phủ định của nó

Bài 2. Cho 2 mệnh đề: $P =$ “Tứ giác ABCD là hình thoi” và $Q =$ “Tứ giác ABCD có hai đường chéo vuông góc và cắt nhau tại trung điểm mỗi đường”

a/ Lập mệnh đề kéo theo “ $P \Rightarrow Q$ ”. Chứng tỏ mệnh đề này là một định lý

b/ Phát biểu định lý đó theo cách dùng thuật ngữ “điều kiện cần”, “điều kiện đủ”

c/ Phát biểu định lý đảo của định lý trên

Bài 3. Dùng phương pháp phản chứng chứng minh các định lý sau:

a/ Nếu $a + b < 2$ thì trong hai số a và b phải có ít nhất một số b hơn 1

b/ Cho n là số tự nhiên, nếu $5n + 4$ là số lẻ thì n là số lẻ

Bài 4. Xác định các tập hợp $A \cap B$, $A \cup B$, $A \setminus B$, $B \setminus A$

a) $A = \{x \in \mathbb{Z} \mid (x^2 - 3x)(2x^2 - 3x + 1) = 0\}$ và $B = \{x \in \mathbb{N} \mid x : 3 \text{ và } x < 10\}$

b) $A = \{x \in \mathbb{N}^* \mid 9 - 2x \geq 0\}$ và $B = \{x \in \mathbb{Q} \mid (x - \sqrt{3})(x - 3)(2x - 1) = 0\}$

c) $A = [-3; 2)$ và $B = \{x \in \mathbb{R} \mid x > -1\}$

d) $A = \{x \in \mathbb{R} \mid |x| \leq 1\}$ và $B = \{x \in \mathbb{R} \mid 0 \leq x < 3\}$.

Bài 5. Xác định phần bù của các tập hợp sau trong tập $\mathbb{R}$:

a) $A = \{x \in \mathbb{R} \mid 4 - x^2 = 0\}$

b) $B = \{x \in \mathbb{R} \mid 2x - 3 \leq 0\}$

c*) $C = \{x \in \mathbb{R} \mid |x| > 3\}$

d*) $D = \{x \in \mathbb{R} \mid 2x^2 - 3x - 5 \neq 0\}$

Bài 6. Viết số gần đúng của $\sqrt{5}$; $\sqrt[3]{2} + \sqrt{7}$ có hai, bốn chữ số thập phân.

Bài 7. a) Chiều dài của một cây cầu là $a = 1645,36\text{m} \pm 1\text{cm}$.

Hãy viết số qui tròn của số gần đúng 1645,36.

b) Giá trị gần đúng của π là $a = 3,141592653589$ với độ chính xác là 10^{-10} Hãy viết số qui tròn của a .

Bài 8. Một bể cá có dạng hình hộp chữ nhật có chiều rộng $a = 60,5 \pm 0,1\text{cm}$;

Chiều dài $b = 142,3 \pm 0,2\text{cm}$ và chiều cao $h = 81,5 \pm 0,3\text{cm}$

Hãy tính diện tích đáy và thể tích của bể đó.

CHƯƠNG 2. HÀM SỐ BẬC NHẤT VÀ BẬC HAI

§1. HÀM SỐ

I. KIẾN THỨC CƠ BẢN

1. Định nghĩa. Cho tập số $D \neq \emptyset$ và $D \subset \mathbb{R}$. Hàm số f xác định trên D là một quy tắc đặt tương ứng mỗi số $x \in D$, với một và chỉ một số $f(x)$.

- Tập D gọi là *tập xác định*; Số x gọi là *biến số*
- Số $f(x)$ gọi là *giá trị của hàm f tại x* .

Ví dụ 1: Xét hàm số $f(x) = \frac{x+1}{x-1}$.

Tại $x = 2$ thì giá trị hàm số là $f(2) = \frac{2+1}{2-1} = 3$

Hàm số xác định khi $x-1 \neq 0 \Leftrightarrow x \neq 1$. Vậy tập xác định $D = \mathbb{R} \setminus \{1\}$

Tập xác định (TXĐ) của hàm số: gồm tất cả các số thực x sao cho $f(x)$ xác định.

- **Chú ý:** $\sqrt[n]{P(x)}$; $n \in \mathbb{N}^*$ xác định $\Leftrightarrow P(x) \geq 0$; $\frac{A(x)}{B(x)}$ xác định $\Leftrightarrow B(x) \neq 0$

2. Đồ thị. Trong mặt phẳng (Oxy), tập hợp các điểm $(x_0; f(x_0))$ với $x_0 \in D$, gọi là đồ thị của hàm $y = f(x)$.

3. Tính biến thiên: Cho tập $K \subset D$

- Hàm số f gọi là *đồng biến* (tăng) trên K nếu: $\forall x_1, x_2 \in K, x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$
- Hàm số f gọi là *nghịch biến* (giảm) trên K nếu: $\forall x_1, x_2 \in K, x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2)$

❖ **Định lý:**

$\forall x_1, x_2 \in K, x_1 \neq x_2,$	$\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} > 0 \Leftrightarrow$ Hàm số f tăng trên K
$\forall x_1, x_2 \in K, x_1 \neq x_2,$	$\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} < 0 \Leftrightarrow$ Hàm số f giảm trên K

Ví dụ 2. Xét hàm số $f(x) = 2x - 1$ có tập xác định $D = \mathbb{R}$ nên $\forall x_1 \neq x_2 \in \mathbb{R}$ thì:

$$\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} = \frac{(2x_2 - 1) - (2x_1 - 1)}{x_2 - x_1} = \frac{2(x_2 - x_1)}{x_2 - x_1} = 2 > 0. \text{ Vậy } f \text{ tăng trên } \mathbb{R}.$$

2. Bảng biến thiên hàm số: Diễn tả hàm số nghịch biến, hay đồng biến trên các khoảng ta dùng chiều mũi tên đi lên hoặc đi xuống. Kết quả đó được tổng kết trong một bảng gọi là *bảng biến thiên*.

x	$-\infty$	2	$+\infty$
$y = x^2 - 4x + 3$	$+\infty$	-1	$+\infty$

5. Tính chẵn, lẻ: Hàm số $y = f(x)$ có tập xác định D

- $\forall x \in D$ có: $-x \in D$ và $f(-x) = f(x) \Leftrightarrow f$ là hàm số chẵn
- $\forall x \in D$ có: $-x \in D$ và $f(-x) = -f(x) \Leftrightarrow f$ là hàm số lẻ

Đồ thị của hàm số chẵn đối xứng qua trục Oy, đồ thị của hàm số lẻ đối xứng qua tâm O là gốc tọa độ.

Ví dụ 2. Xét hàm số $y = f(x) = -2x^2$. Tập xác định $D = \mathbb{R}$ nên $\forall x \in D$ thì $-x \in D$ và $f(-x) = -2(-x)^2 = -2x^2 = f(x)$. Vậy hàm số chẵn và đồ thị của nó đối xứng qua trục Oy.

II. BÀI TẬP ÁP DỤNG

Bài 1. Tìm tập xác định của hàm số: $y = \frac{\sqrt{4-x}}{2x-5}$

Giải

$$\text{Hàm số } y \text{ xác định} \Leftrightarrow \begin{cases} 4-x \geq 0 \\ 2x-5 \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \leq 4 \\ x \neq \frac{5}{2} \end{cases}$$

$$\text{Tập xác định } D = (-\infty; 4] \setminus \left\{ \frac{5}{2} \right\}.$$

Bài 2. Cho hàm số $f(x) = \frac{1}{x-3}$.

Xét tính đồng biến hay nghịch biến của hàm số trên khoảng $(3; +\infty)$

Giải

Tập xác định $D = \mathbb{R} \setminus \{3\}$. Khoảng $(3; +\infty) \subset D$

$\forall x_1, x_2 \in (3; +\infty)$ và $x_1 \neq x_2$ ta có

$$f(x_2) - f(x_1) = \frac{1}{x_2-3} - \frac{1}{x_1-3} = \frac{x_1-3-x_2+3}{(x_2-3)(x_1-3)} = \frac{x_1-x_2}{(x_1-3)(x_2-3)}$$

$$\Rightarrow \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} = \frac{x_1 - x_2}{(x_2-3)(x_1-3)} \cdot \frac{1}{x_2 - x_1} = \frac{-1}{(x_2-3)(x_1-3)}$$

$$\text{Vì } x_1, x_2 \in (3; +\infty) \Rightarrow x_1 > 3 \vee x_2 > 3 \Rightarrow \frac{-1}{(x_2-3)(x_1-3)} < 0$$

Vậy hàm số f nghịch biến trên khoảng $(3; +\infty)$

Bài 3. Xét tính chẵn, lẻ của hàm số $y = f(x) = \frac{x^4 - 3x^2 + 1}{x}$

Giải

Tập xác định $D = \mathbb{R} \setminus \{0\}$

$$\forall x \in D \Rightarrow -x \in D, f(-x) = \frac{(-x)^4 - 3(-x)^2 + 1}{-x} = \frac{x^4 - 3x^2 + 1}{-x} = -f(x). \text{ Vậy hàm số lẻ.}$$

BÀI TẬP**Bài 1.** Tìm tập xác định các hàm số:

a) $y = \frac{1}{2}x - 3$

b) $y = \frac{1}{4}x^2$

c) $y = \frac{x+3}{x-1} + \frac{x-1}{x+3}$

d) $y = \frac{x+3}{x^2-3x+2}$

e) $y = \frac{2x+3}{x^2-x+1}$

f) $y = \frac{x+5}{9-x^2} + \frac{x+3}{x^2-4x}$

Bài 2. Tìm tập xác định các hàm số:

a) $y = \sqrt{3x-5}$

b) $y = \sqrt{\frac{2x-5}{-3}}$

c) $y = \frac{x-1}{\sqrt{5-4x}}$

d) $y = \sqrt{5-x} + \sqrt{5+x}$

e) $y = \frac{\sqrt{x-1}}{x-2}$

f) $y = \frac{x^2-2}{(x+2)\sqrt{x+1}}$

Bài 3. Cho hàm số $y = f(x) = -2x + 6$

a) Tính $f(0)$; $f(\frac{3}{2})$; $f(a+1)$

b) Tìm x để $f(x) = 0$; $f(x) = 3$

Bài 4. Cho hàm số $y = f(x) = x^2 - 3x + 2$

a) Tính $f(2)$; $f(a-5)$

b) Tìm x để $f(x) = 0$; $f(x) = -2$; $f(x) = 12$

Bài 5. Chứng minh rằng các hàm số sau đây đồng biến trên khoảng đã chỉ ra:

a) $y = f(x) = x^2 - 2x$ trên $(2; +\infty)$

b) $y = -\frac{1}{x-2}$ trên $(2; +\infty)$

c) $y = x^3$ trên $(-\infty; +\infty)$

d) $y = \sqrt{x}$ trên $(0; +\infty)$

Bài 6. Chứng minh rằng các hàm số sau nghịch biến trên khoảng đã chỉ ra:

a) $y = f(x) = x^2 - 4x + 3$ trên khoảng $(-\infty; 2)$

b) $y = \frac{2}{x+5}$ trên khoảng $(-5; +\infty)$

c) $y = \sqrt{4-x}$ trên khoảng $(-\infty; 4)$

d) $y = \frac{x+3}{x+2}$ trên khoảng $(-\infty; -2)$

Bài 7. Chứng minh các hàm số sau đây là chẵn:

a) $y = f(x) = x^2$; b) $y = |x-2| + |x+2|$; c) $y = \sqrt{2-x} + \sqrt{2+x}$; d) $y = \frac{\sqrt{3-x} + \sqrt{3+x}}{x^2-4}$

Bài 8. Chứng minh các hàm số sau đây là lẻ:

a) $y = f(x) = x^3 - 3x$

b) $y = |3x-2| - |3x+2|$

c) $y = \frac{x}{x^2-1}$

d) $y = \frac{\sqrt{3+x} - \sqrt{3-x}}{|x|-2}$

§2. HÀM SỐ $y = ax + b$

I. KIẾN THỨC CƠ BẢN

1. Định nghĩa: Hàm số bậc nhất là hàm số có dạng: $y = ax + b$ ($a \neq 0$).

2. Tính chất:

a) Tập xác định: $D = \mathbb{R}$

b) Tính biến thiên:

x	$-\infty$	$+\infty$
$y = ax + b$ ($a > 0$)	$-\infty$	$+\infty$

x	$-\infty$	$+\infty$
$y = ax + b$ ($a < 0$)	$+\infty$	$-\infty$

☞ Khi $a > 0$ hàm số đồng biến trên $\mathbb{R}$. ☞ Khi $a < 0$ hàm số nghịch biến trên $\mathbb{R}$.

c) Tính chẵn, lẻ:

- $b = 0$ hàm số $y = ax$ là hàm số lẻ.
- $b \neq 0$ hàm số $y = ax + b$ không chẵn, không lẻ.

c) Đồ thị: là đường thẳng cắt trục Oy tại $(0; b)$ và cắt Ox tại $\left(-\frac{b}{a}; 0\right)$

Đường thẳng $y = ax + b$ có hệ số góc là a .

▪ **Chú ý:** 1/ Cho hai đường thẳng $(d): y = ax + b$ và $(d'): y = a'x + b'$.

- $(d) // (d') \Leftrightarrow a = a'$ và $b \neq b'$
- $(d) \equiv (d') \Leftrightarrow a = a'$ và $b = b'$
- (d) cắt $(d') \Leftrightarrow a \neq a'$

2/ Mọi đường thẳng trong mặt phẳng (Oxy) đều có phương trình dạng:

$$ax + by + c = 0.$$

Đặc biệt: a) $(d): y = m$ cùng phương với Ox và đi qua điểm $(0; m)$

b) $(d): x = n$ cùng phương với Oy và đi qua điểm $(n; 0)$.

II. BÀI TẬP ÁP DỤNG

Bài 1. Lập phương trình đường thẳng đi qua $M(2; 1)$ và $N(1; -1)$

Có $x_M = 2 \neq x_N = 1$ nên đường thẳng MN không song song với Oy

Gọi phương trình đường thẳng (MN): $y = ax + b$

$$\begin{cases} M(2; 1) \in (MN) \\ N(1; -1) \in (MN) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 1 = 2a + b \\ -1 = 1a + b \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 2 \\ b = -3 \end{cases}$$

Vậy phương trình đường thẳng (MN): $y = 2x - 3$.

Bài 2. Lập bảng biến thiên và vẽ đồ thị hàm số $y = \begin{cases} x + 2 & \text{với } x \geq 1 \\ -x + 4 & \text{với } x < 1 \end{cases}$

Giải

- Tập xác định: $D = [1; +\infty) \cup (-\infty; 1) = (-\infty; +\infty) = \mathbb{R}$
- Bảng biến thiên: khi $x = 1 \Rightarrow y = 3$

x	$-\infty$	1	$+\infty$
y	$+\infty$	3	$+\infty$

- Đồ thị: Vẽ nhánh I: đồ thị $y = x + 2$ với $x \geq 1$

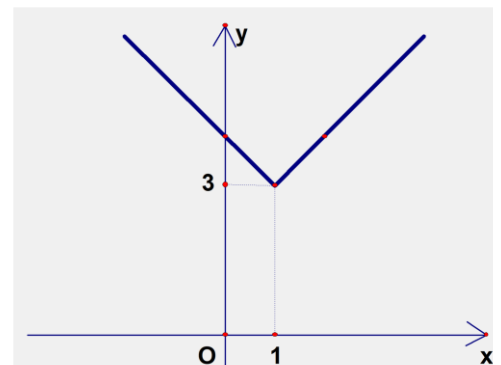
$$x = 1 \Rightarrow y = 3; \quad x = 2 \Rightarrow y = 4$$

Nhánh I là tia có điểm đầu là (1; 3) và đi qua (2; 4)

Vẽ nhánh II: đồ thị $y = -x + 4$ với $x < 1$

$$x = 1^- \Rightarrow y = 3^+; \quad x = 0 \Rightarrow y = 4$$

Nhánh II là tia có điểm đầu (1; 3) và đi qua (0; 4).



BÀI TẬP

Bài 1. Tìm giá trị của m sao cho đồ thị của hàm số $y = 2mx + m + 1$

- Đi qua điểm A (1 ; 2)
- Song song với đường thẳng $y = 4x$.
- Cắt trục hoành tại điểm có hoành độ bằng -3.

Bài 2. Vẽ đồ thị của các hàm số:

a. $y = 2x - 3$

b. $y = \sqrt{2}$

c. $y = \begin{cases} -x + 2 & x \geq 2 \\ 3 & x < 2 \end{cases}$

d. $y = \begin{cases} x + 2 & x \geq -2 \\ 5 - 2x & x < -2 \end{cases}$

Bài 3. Lập phương trình đường thẳng (d) khi biết:

- (d) qua điểm A (-1 ; 2) và có hệ số góc bằng $-\frac{1}{2}$
- (d) qua 2 điểm A (1; -3) và B (0; -5).
- (d) qua điểm A (4; 3) và song song với đường thẳng $(d_1): x + 2y - 4 = 0$

Bài 4. Cho đường thẳng (d): $y = 5 - 4x$

- Tìm giao điểm của (d) với các trục Ox, Oy;
- Tìm giao điểm của (d) với $(d_1): y = 2x + 3$;
- Tìm giao điểm của (d) với $(d_2): y = 3$;
- Tìm giao điểm của (d) với $(d_3): x = -1$.

Bài 5. Vẽ đồ thị của mỗi hàm số sau và lập bảng biến thiên:

a. $y = |2x + 1|$

b. $y = -2|x + 1|$

c. $y = 2|x| - 1$

Bi 6. Lập phương trình đường thẳng (d) khi biết:

a. (d) đi qua A(2 ; - 1) và B (2; 3);

b. (d) vuông góc (d'): $y = 2x - 1$ và cắt trục tung tại điểm có tung độ là 8;

c. (d) đi qua gốc tọa độ và góc tạo bởi tia Ox với phần đường thẳng (d) nằm trên trục hoành có số đo là 30°

Gợi ý : b) (d) $y = ax + b$; (d') : $y = a'x + b'$; $(d) \perp (d') \Leftrightarrow a.a' = -1$

c) Hệ số góc $a = \tan \alpha$ với α là số đo góc tạo bởi tia Ox và phần đường thẳng (d) nằm trên trục hoành.

§3. HÀM SỐ BẬC 2

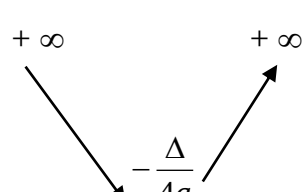
I. KIẾN THỨC CƠ BẢN

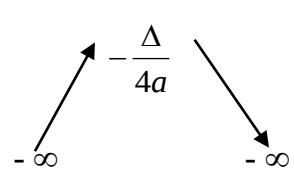
1. Định nghĩa. Hàm số bậc hai là hàm số có dạng: $y = ax^2 + bx + c$ trong đó a, b, c là những hằng số với $a \neq 0$.

2. Tính chất

a. Tập xác định: $D = \mathbb{R}$

b. Tính biến thiên

x	$-\infty$ $-\frac{b}{2a}$ $+\infty$
$y = ax^2 + bx + c$ ($a > 0$)	$+\infty$ 

x	$-\infty$ $-\frac{b}{2a}$ $+\infty$
$y = ax^2 + bx + c$ ($a < 0$)	$-\infty$ 

c. Tính chẵn, lẻ

- $b = 0$ Hàm số $y = ax^2 + c$ là hàm số chẵn.
- $b \neq 0$ Hàm số $y = ax^2 + bx + c = 0$ không chẵn, không lẻ.

d. Đồ thị: là một Parabol (P) có đỉnh $I\left(-\frac{b}{2a}; -\frac{\Delta}{4a}\right)$ và có trục đối xứng là đường thẳng

$$x = -\frac{b}{2a}.$$

II. BÀI TẬP ÁP DỤNG

Bài 1. Khảo sát và vẽ đồ thị của hàm số: $y = x^2 - 4x + 3$

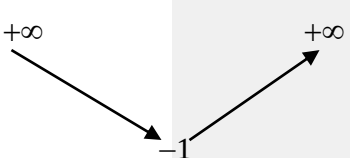
Giải

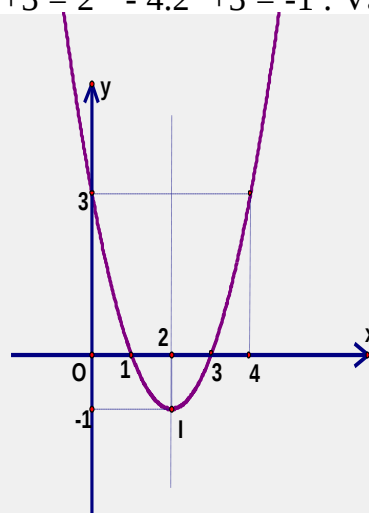
Tập xác định $D = \mathbb{R}$

Đỉnh I có tọa độ : $x_I = -\frac{b}{2a} = -\frac{-4}{2.1} = 2$; $y_I = (x_I)^2 - 4.(x_I) + 3 = 2^2 - 4.2 + 3 = -1$. Vậy $I(2; -1)$.

Trục đối xứng $x = 2$

Bảng biến thiên

x	$-\infty$ 2 $+\infty$
$y = x^2 - 4x + 3$	$+\infty$ 



Bài 2: Cho Parabol (P): $y = -x^2 + bx + c$

a/ Tìm b, c biết (P) có đỉnh I(1 ; -1).

b/ Tìm giao điểm của (P) và đường thẳng (D): $y = 3x - 2$

Giải

$$\text{a/ Ta có : } x_I = -\frac{b}{2a} = 1 \Leftrightarrow b = -2a \Leftrightarrow b = -2 \cdot (-1) = 2$$

$$I(1; -1) \in (P) \Leftrightarrow -1 = -1^2 + b \cdot 1 + c \Leftrightarrow b + c = 0, b = 2 \Rightarrow c = -2$$

b/ Có (P): $y = -x^2 + 2x - 2$ và (D) : $y = 3x - 2$

Phương trình hoành độ giao điểm của (P) và (D): $-x^2 + 2x - 2 = 3x - 2$
 $\Leftrightarrow x^2 + x = 0 \Leftrightarrow x = 0 \vee x = -1$

Thế $x = 0$ vào $y = 3x - 2 \Rightarrow y = -2$

Thế $x = -1$ vào $y = 3x - 2 \Rightarrow y = 3(-1) - 2 = -5$.

Vậy 2 giao điểm là $(0; -2); (-1; -5)$.

BÀI TẬP

Bài 1: Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị của các hàm số:

a. $y = -\frac{1}{2}x^2$

b. $y = x^2 - 2$

c. $y = -x^2 + 4x$

d. $y = x^2 - 2x + 2$

Bài 2: Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị của các hàm số:

a. $y = (3-x)^2$

b. $y = -\frac{1}{3}(x-2)^2$

Bài 3: Vẽ đồ thị của mỗi hàm số sau:

a. $y = \begin{cases} -x+1 & x \leq -1 \\ -x^2+3 & x > 1 \end{cases}$

b. $y = \begin{cases} -x & x \leq 0 \\ -x^2+2x & x > 0 \end{cases}$

Bài 4: Viết phương trình của Parabol (P): $y = ax^2 + bx + 2$ ($a \neq 0$). Biết,

a. Parabol qua A (1; 5) và B (-2 ; 8);

b. Parabol qua A (3; -4) và có trục đối xứng là $x = -\frac{3}{2}$;

c. Parabol có đỉnh I (2; -2).

Bài 5: Tìm giao điểm của đồ thị các hàm số sau đây:

Trong mỗi trường hợp vẽ đồ thị của chúng trên cùng hệ trục tọa độ.

a. $y = x - 1$ và $y = x^2 - 2x - 1$

b. $y = 2x - 5$ và $y = x^2 - 4x + 4$

c. $y = x^2 - x$ và $y = -x^2 - 2x + 3$

Bài 6: a. Cho hai Parabol (P_1): $y = 2x^2$ và (P_2): $y = 2(x-4)^2$ có thể dùng phép tịnh tiến như thế nào để nhận được (P_2) từ (P_1).

b. Cũng hỏi tương tự với (P_1) : $y = 2x^2$ và (P_2) : $y = 2x^2 + 4x - 3$

Bài 7: a. Tìm giá trị lớn nhất, nhỏ nhất của hàm số: $y = x^2 - 2x$ với $0 \leq x \leq 3$

b. Tương tự hàm số: $y = -x^2 + 5x - 4$ với $0 \leq x \leq 3$

Bài 8: a. Khảo sát và vẽ đồ thị (P) : $y = x^2 - 2x$

b. Dùng đồ thị (P) biện luận theo m số nghiệm phương trình $x^2 - 2x = m$

ÔN TẬP CHƯƠNG II

----- ★ ★ ★  -----

I. KIẾN THỨC CƠ BẢN

• Tập xác định: $\frac{1}{\sqrt{P(x)}}$ xác định $\Leftrightarrow P(x) > 0$; $\frac{\sqrt{P(x)}}{Q(x)}$ xác định $\Leftrightarrow \begin{cases} P(x) \geq 0 \\ Q(x) \neq 0 \end{cases}$

• Hàm số $y = f(x)$ có tập xác định D và $K \subset D$. $\forall x_1, x_2 \in K; x_1 \neq x_2$

$\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} > 0 \Leftrightarrow f$ đồng biến trên K ; $\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} < 0 \Leftrightarrow f$ nghịch biến trên K

- Hàm số $y = f(x)$ có tập xác định D . $\forall x \in D$ có $-x \in D$, $f(-x) = f(x) \Leftrightarrow f$ là hàm số chẵn; $f(-x) = -f(x) \Leftrightarrow f$ là hàm số lẻ.
- Tính biến thiên của hàm số: $y = ax + b$ ($a \neq 0$)

x	$-\infty$	$+\infty$
$y = ax + b$ ($a > 0$)	$-\infty$	$+\infty$

x	$-\infty$	$+\infty$
$y = ax + b$ ($a < 0$)	$+\infty$	$-\infty$

- Tính biến thiên của hàm số: $y = ax^2 + bx + c$ ($a \neq 0$)

x	$-\infty$	$-\frac{b}{2a}$	$+\infty$
$y = ax^2 + bx + c$ ($a > 0$)	$+\infty$	$-\frac{\Delta}{4a}$	$+\infty$

x	$-\infty$	$-\frac{b}{2a}$	$+\infty$
$y = ax^2 + bx + c$ ($a < 0$)	$-\infty$	$-\frac{\Delta}{4a}$	$-\infty$

- Cho hàm số: $y = f(x)$ có đồ thị (G_1) và $y = g(x)$ có đồ thị (G_2) . Muốn tìm giao điểm của (G_1) và (G_2) ta giải hệ $\begin{cases} y = f(x) \\ y = g(x) \end{cases}$ hoặc giải phương trình $f(x) = g(x)$. Từ x tìm y .

II. BÀI TẬP

Bài 1. Tìm tập xác định của các hàm số:

a. $y = \frac{\sqrt{x}}{x-1}$

b. $y = \sqrt{x+2} + \sqrt{5-x}$

c. $y = \frac{\sqrt{2x-1}}{x^2-x-2}$

d*. $y = \frac{\sqrt{x-1} + \sqrt{4-x}}{(x-2)(x-3)}$

Bài 2. Lập bảng biến thiên của các hàm số:

a. $y = -3x + 5$

b. $y = |2 - x|$

c. $y = x^2 - 4x + 5$

d. $y = -x^2 - x + 3$

Bài 3. Bảng định nghĩa xét tính biến thiên của hàm số $y = \frac{-2}{x+1}$

Bài 4. Xét tính chẵn, lẻ của các hàm số sau:

a. $y = \frac{x}{x^2-1}$

b. $y = \sqrt{x^2} + x^2$

c. $y = \frac{x^2-4}{|x|-1}$

d*. $y = |x| + |x-1|$

Bài 5. Hãy vẽ đồ thị của các hàm số sau trên cùng mặt phẳng tọa độ rồi xác định tọa độ giao điểm của chúng:

a. $y = -x + 3$ và $y = -x^2 - 4x + 1$

b. $y = 2x + 6$ và $y = x^2 - 5x + 6$

c*. $y = |x|$ và $y = -x^2 + 2x + 2$

Bài 6. Cho hàm số $y = x^2 + mx + m - 1$

a. Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị hàm số với $m = 4$.

b*. Tìm các điểm cố định mà họ Parabol $y = x^2 + mx + m - 1$ đi qua khi m thay đổi.

Bi 7. Cho đồ thị (P) $y = -x^2 + 2x$. Sẽ được đồ thị hàm số nào nếu tịnh tiến (P):

a. Xuống dưới 3 đơn vị

b. Sang trái 2 đơn vị rồi lên trên 5 đơn vị

Bài 8. Vẽ đồ thị của các hàm số sau rồi lập bảng biến thiên của nó:

a. $y = \left| \frac{3}{2}x - 2 \right|$

b. $y = \begin{cases} 2x & x < 0 \\ x^2 - x & x \geq 0 \end{cases}$

CHƯƠNG III. PHƯƠNG TRÌNH VÀ HỆ PHƯƠNG TRÌNH

§1. ĐẠI CƯƠNG VỀ PHƯƠNG TRÌNH

I. KIẾN THỨC CƠ BẢN

1. Phương trình một ẩn

Định nghĩa: Cho hàm số $y = f(x)$ và $y = g(x)$ có TXĐ lần lượt D_f và D_g , đặt $D = D_f \cap D_g$. Mệnh đề $f(x) = g(x)$ được gọi là *phương trình ẩn x*.

x : gọi là ẩn. D gọi là TXĐ của phương trình.

Số $x_0 \in D$ là một nghiệm của phương trình nếu $f(x_0) = g(x_0)$ là mệnh đề đúng

2. Phương trình tương đương

$f_1(x) = g_1(x) \Leftrightarrow f_2(x) = g_2(x)$ (chúng có cùng tập nghiệm)

Định lý 1: Cho $f(x) = g(x)$ có TXĐ: D , $y = h(x)$ là hàm số xác định trên D ta có:

$$f(x) = g(x) \Leftrightarrow f(x) + h(x) = g(x) + h(x)$$

$$f(x) = g(x) \Leftrightarrow f(x).h(x) = g(x).h(x) \text{ nếu } h(x) \neq 0, \forall x \in D$$

3. Phương trình hệ quả

$f_1(x) = g_1(x)$ gọi là phương trình hệ quả của phương trình: $f(x) = g(x)$ nếu tập nghiệm của nó chứa tập nghiệm của phương trình $f(x) = g(x)$. Ta viết:

$$f(x) = g(x) \Rightarrow f_1(x) = g_1(x)$$

Ví dụ 1. Cho phương trình: $\sqrt{x} = 2 - x$ (1) có tập nghiệm $S_1 = \{1\}$

Bình phương hai vế ta được phương trình mới: $x = 4 - 4x + x^2$ (2) có tập nghiệm $S_2 = \{1; 4\}$. Nhận xét: $S_1 \subset S_2$ ta nói phương trình (2) là phương trình hệ quả của phương trình (1).

Định lý 2: Khi bình phương hai vế của một phương trình ta được phương trình hệ quả của phương trình đã cho: $f(x) = g(x) \Rightarrow [f(x)]^2 = [g(x)]^2$

Ví dụ 2. Cho phương trình $|x-1| = x-3$ (1)

Bình phương hai vế ta được phương trình hệ quả:

$$x^2 - 2x + 1 = x^2 - 6x + 9 \Leftrightarrow x = 2$$

Thử $x = 2$ không thỏa (1). Vậy phương trình đã cho vô nghiệm

4. Phương trình nhiều ẩn: là những phương trình có dạng: $F(x, y) = G(x, y)$,

$F(x, y, z) = G(x, y, z), \dots$

Ví dụ 3. $-x + 2y + 3 = 2x^2 + 4xy - y^2$ (1)

Ví dụ 4. $2x + 5y + z = xyz$

Các khái niệm về TXĐ, tập nghiệm, phương trình tương đương, phương trình hệ quả, ... , tương tự như ở phương trình một ẩn.

5. Phương trình chứa tham số: là những phương trình trong đó ngoài các ẩn còn có những chữ khác (tham số).

II. BÀI TOÁN ÁP DỤNG

Bài 1. Tìm điều kiện xác định rồi suy ra tập nghiệm phương trình:

$$\sqrt{x-1} - 2x = \sqrt{x-1} - 6 \quad (*)$$

Giải

Điều kiện $x-1 \geq 0 \Leftrightarrow x \geq 1$

$$(*) \Rightarrow -2x = -6 \Leftrightarrow x = 3 \text{ (thoả đkpt)}$$

Vậy tập nghiệm phương trình: $S = \{3\}$

Bài 2. Giải phương trình $(x^2 - 4x + 3)\sqrt{2-x} = 0$ (*)

Giải

$$(*) \Leftrightarrow \begin{cases} 2-x \geq 0 \\ \sqrt{2-x} = 0 \\ x^2 - 4x + 3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \leq 2 \\ 2-x = 0 \\ x^2 - 4x + 3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \leq 2 \\ x = 2 \\ x = 1 \vee x = 3 \end{cases}$$

Vậy tập nghiệm của phương trình $S = \{1; 2\}$

BÀI TẬP

Bài 1. Tìm điều kiện xác định của mỗi phương trình sau rồi suy ra tập nghiệm của nó:

a) $\sqrt{x} = \sqrt{-x}$

b) $3x - \sqrt{x-2} = \sqrt{2-x} + 6$

c) $\frac{\sqrt{3-x}}{x-3} = x + \sqrt{x-3}$

d) $x + \sqrt{x-1} = \sqrt{-x}$

Bài 2. Giải các phương trình:

a) $x + \sqrt{x-1} = 2 + \sqrt{x-1}$

b) $x + \sqrt{x-1} = 0.5 + \sqrt{x-1}$

c) $\frac{x}{2\sqrt{x-5}} = \frac{3}{\sqrt{x-5}}$

d) $\frac{x}{2\sqrt{x-5}} = \frac{2}{\sqrt{x-5}}$

Bài 3. Giải các phương trình:

a) $x + \frac{1}{x-1} = \frac{2x-1}{x-1}$

b) $x + \frac{1}{x-2} = \frac{2x-3}{x-2}$

c) $(x^2 - 3x + 2)\sqrt{x-3} = 0$

d) $(x^2 - x - 2)\sqrt{x+1} = 0$

Bài 4. Giải các phương trình sau bằng cách bình phương hai vế của phương trình:

a) $\sqrt{x-3} = \sqrt{9-2x}$

b) $\sqrt{x-1} = x-3$

c) $2|x-1| = x+2$

d) $|x-2| = 2x-1$

§2. PHƯƠNG TRÌNH QUY VỀ PHƯƠNG TRÌNH BẬC NHẤT, BẬC HAI

I. KIẾN THỨC CƠ BẢN

1. Phương trình bậc nhất: $ax + b = 0$ (*)

- $a \neq 0$: (*) có một nghiệm duy nhất $x = -\frac{b}{a}$
- $a = 0$ và $b \neq 0$: (*) vô nghiệm
- $a = 0$ và $b = 0$: (*) có nghiệm đúng với mọi $x \in \mathbb{R}$

Ví dụ 1. Giải và biện luận phương trình sau: $m^2x + 2 = x + 2m$ (*)

Giải

$$pt \Leftrightarrow m^2x - x = 2m - 2$$

$$\Leftrightarrow (m^2 - 1)x = 2(m - 1)$$

- Khi $m \neq \pm 1 \Leftrightarrow m^2 - 1 \neq 0 \Rightarrow pt$ (*) có nghiệm duy nhất $x = \frac{2(m-1)}{m^2-1} = \frac{2}{m+1}$
- Khi $m = 1$, (*): $0x = 0 \Rightarrow$ phương trình có nghiệm $\forall x \in \mathbb{R}$
- Khi $m = -1$, (*): $0x = -4 \Rightarrow$ phương trình vô nghiệm

Vậy:

- $m \neq \pm 1$: pt (*) có nghiệm $x = \frac{2}{m+1}$ (tập nghiệm $S = \left\{ \frac{2}{m+1} \right\}$)
- $m = -1$: (*) vô nghiệm (tập nghiệm $S = \emptyset$)
- $m = 1$: (*) nghiệm đúng với mọi $x \in \mathbb{R}$ (tập nghiệm $S = \mathbb{R}$)

2. Phương trình bậc hai: $ax^2 + bx + c = 0$

- $a = 0$: trở về giải và biện luận phương trình $bx + c = 0$
- $a \neq 0$: tính $\Delta = b^2 - 4ac$
 - $\Delta > 0$: phương trình có hai nghiệm phân biệt:
$$x_1 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} \vee x_2 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}$$
 - $\Delta = 0$: phương trình có một nghiệm kép
$$x = -\frac{b}{2a}$$
 - $\Delta < 0$: phương trình vô nghiệm

- $a = 0$: Trở về giải và biện luận phương trình $bx + c = 0$
- $a \neq 0$: tính $\Delta' = b'^2 - ac$
 - $\Delta' > 0$: phương trình có hai nghiệm phân biệt:
$$x_1 = \frac{-b' + \sqrt{\Delta'}}{a} \vee x_2 = \frac{-b' - \sqrt{\Delta'}}{a}$$
 - $\Delta' = 0$: phương trình có một nghiệm kép:
$$x = -\frac{b}{2a}$$
 - $\Delta' < 0$: phương trình vô nghiệm

- **Chú ý:** Nếu x_1, x_2 là hai nghiệm của phương trình $ax^2 + bx + c = 0$ thì
$$ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2)$$

Ví dụ 2. Giải và biện luận phương trình sau theo m : $x^2 - 4x - m + 5 = 0$ (*)

$$\Delta' = 2^2 - (-m + 5) = m - 1$$

- $m < 1 \Leftrightarrow \Delta' < 0 \Rightarrow pt$ (*) vô nghiệm
- $m = 1 \Leftrightarrow \Delta' = 0 \Rightarrow pt$ (*) có nghiệm kép $x_1 = x_2 = -\frac{b'}{a} = 2$
- $m > 1 \Leftrightarrow \Delta' > 0 \Rightarrow pt$ (*) có hai nghiệm phân biệt: $x_{1,2} = 2 \pm \sqrt{m-1}$

3. Ứng dụng của định lý Vi-ét:

Hai số x_1 và x_2 là các nghiệm của phương trình bậc hai $ax^2 + bx + c = 0$ khi và chỉ khi chúng thỏa mãn các hệ thức :

$$x_1 + x_2 = -\frac{b}{a} \text{ và } x_1 x_2 = \frac{c}{a}$$

Ngược lại: Nếu hai số $u+v=S$ và $u.v=P$ thì u,v là hai nghiệm của phương trình : $x^2 - Sx + P = 0$

Định lý: Cho phương trình bậc hai $ax^2 + bx + c = 0$ có hai nghiệm x_1 và x_2 ($x_1 \leq x_2$).

Đặt $S = -\frac{b}{a}$ và $P = \frac{c}{a}$. Khi đó,

- Nếu $P < 0$ thì $x_1 < 0 < x_2$ (hai nghiệm trái dấu)
- Nếu $P > 0$ và $S > 0$ thì $0 < x_1 \leq x_2$ (hai nghiệm dương)
- Nếu $P > 0$ và $S < 0$ thì $x_1 \leq x_2 < 0$ (hai nghiệm âm)

Ví dụ 3: Phương trình: $(1-\sqrt{2})x^2 - 2(1+\sqrt{2})x + \sqrt{2} = 0$

Ta có $a = 1-\sqrt{2} < 0$ và $c = \sqrt{2} > 0$ nên $P < 0$. Vậy phương trình có hai nghiệm trái dấu.

4. Phương trình quy về bậc nhất, bậc hai

a/ Phương trình chứa ẩn trong dấu trị tuyệt đối

Dạng 1: $|A| = B \Leftrightarrow \begin{cases} B \geq 0 \\ A = B \\ A = -B \end{cases}$

Ví dụ: Giải phương trình $|x-3| = 2x+1$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2x-1 \geq 0 \\ x-3 = 2x-1 \\ x-3 = -(2x-1) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq \frac{1}{2} \\ x = -2 \\ x = \frac{4}{3} \end{cases} \Rightarrow x = \frac{4}{3}$$

Dạng 2: $|A| = |B| \Leftrightarrow \begin{cases} A = B \\ A = -B \end{cases}$

b/ Phương trình chứa ẩn dưới dấu căn

Dạng 1:

$$\sqrt{A} = \sqrt{B} \Leftrightarrow \begin{cases} B \geq 0 \\ A = B \end{cases}$$

Dạng 2: $\sqrt{A} = B \Leftrightarrow \begin{cases} B \geq 0 \\ A = B^2 \end{cases}$

Ví dụ: Giải phương trình

1) $\sqrt{2x-5} = \sqrt{x-1}$

2) $\sqrt{2x-3} = x-2$

Giải

1) $\sqrt{2x-5} = \sqrt{x-1} \Leftrightarrow \begin{cases} x-1 \geq 0 \\ 2x-5 = x-1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 1 \\ x = 4 \end{cases}$

Vậy nghiệm phương trình : $x = 2$

$$2) \sqrt{2x-3} = x-2$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x-2 \geq 0 \\ 2x-3 = (x-2)^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 2 \\ x^2 - 6x + 7 = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 2 \\ \begin{cases} x = 3 - \sqrt{2} \text{ (l)} \\ x = 3 + \sqrt{2} \text{ (n)} \end{cases} \end{cases}$$

Vậy nghiệm của phương trình $x = 3 + \sqrt{2}$

BÀI TẬP

Bài 1. Giải các phương trình sau:

$$a/ \frac{(x-2)(x-1)}{\sqrt{x}-1} = 0$$

$$b/ \sqrt{x^2-2} = 1-x$$

$$c/ \sqrt{5x+6} = x-6$$

$$d/ \sqrt{2x-1} = \sqrt{x+3}$$

Bài 2. Giải các phương trình sau

$$a/ |3x-2| = 2x+3$$

$$b/ |2x-1| = |5x-2|$$

$$c/ |x-4| = 2x-5$$

$$d/ |3x-2| = |x+1|$$

Bài 3. Giải và biện luận các phương trình:

$$a/ (m^2+2)x - 2m = x - 3$$

$$b/ m(x-m)x = x + m - 2$$

$$c/ m(x-2) + 6 = m(x-m+3) = 0$$

$$d/ m^2(x-1) + m = x(3m-2)$$

Bài 4. Giải và biện luận các phương trình:

$$a/ 2x^2 - 3x + m - 7 = 0$$

$$b/ (m-2)x^2 - 2mx + m + 9 = 0$$

Bài 5. Cho phương trình: $2x^2 - 3x - 8 = 0$. Không giải phương trình hãy tính:

a/ Tổng các bình phương hai nghiệm của nó;

b/ Tổng các lập phương hai nghiệm của nó;

c/ Tổng các lũy thừa bậc bốn hai nghiệm của nó.

Bài 6. Cho phương trình: $x^2 - 4x + m - 1 = 0$

a/ Tìm m để phương trình có hai nghiệm;

b/ Tìm m để phương trình có hai nghiệm $x_1; x_2$ thỏa hệ thức $x_1^3 + x_2^3 = 40$.

§3. PHƯƠNG TRÌNH VÀ HỆ PHƯƠNG TRÌNH BẬC NHẤT NHIỀU ẨN

I. KIẾN THỨC CƠ BẢN

1. Phương trình bậc nhất hai ẩn: $ax + by = c$, với $\begin{cases} a, b, c \in \mathbb{R} \\ a^2 + b^2 \neq 0 \end{cases}$

Cặp số $(x_0; y_0)$ là nghiệm của phương trình khi $ax_0 + by_0 = c$. Người ta chứng minh phương trình bậc nhất hai ẩn luôn luôn có vô số nghiệm.

Biểu diễn hình học tập nghiệm là một đường thẳng nằm trong mặt phẳng tọa độ Oxy.

2. Hệ phương trình bậc nhất hai ẩn

Hệ phương trình bậc nhất hai ẩn có dạng: $\begin{cases} ax + by = c \\ a'x + b'y = c' \end{cases}$, với x, y là ẩn số; các chữ số còn lại là hệ số.

☞ Giải hệ phương trình bậc nhất hai ẩn:

Ngoài các phương pháp cộng, phương pháp thế ta đã biết ở lớp 9, còn có phương pháp giải bằng định thức sau:

$\begin{cases} ax + by = c & (a^2 + b^2 \neq 0) \\ a'x + b'y = c' & (a'^2 + b'^2 \neq 0) \end{cases}$	
Lập các định thức:	
$D = \begin{vmatrix} a & b \\ a' & b' \end{vmatrix} = ab' - a'b; \quad D_x = \begin{vmatrix} c & b \\ c' & b' \end{vmatrix} = cb' - c'b; \quad D_y = \begin{vmatrix} a & c \\ a' & c' \end{vmatrix} = ac' - a'c$	
1) $D \neq 0$: Hệ có một nghiệm duy nhất (x, y), trong đó $x = \frac{D_x}{D} \quad \text{và} \quad y = \frac{D_y}{D}$	
2) $D = 0$: $D_x \neq 0$ hoặc $D_y \neq 0$: Hệ vô nghiệm $D_x = D_y = 0$: Hệ có vô số nghiệm, tập nghiệm của hệ là tập nghiệm của phương trình $ax + by = c$	

Ví dụ 1: Giải hệ phương trình: $\begin{cases} 5x - 2y = -9 \\ 4x + 3y = 2 \end{cases}$

Giải

Ta có: $D = \begin{vmatrix} 5 & -2 \\ 4 & 3 \end{vmatrix} = 23; \quad D_x = \begin{vmatrix} -9 & -2 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = -23; \quad D_y = \begin{vmatrix} 5 & -9 \\ 4 & 2 \end{vmatrix} = 46$

Hệ phương trình có nghiệm duy nhất $\begin{cases} x = \frac{D_x}{D} = -1 \\ y = \frac{D_y}{D} = 2 \end{cases}$

Vậy nghiệm của hệ phương trình là $(-1; 2)$.

3. Hệ phương trình bậc nhất ba ẩn

$$\text{Dạng: } \begin{cases} a_1x + b_1y + c_1z = d_1 \\ a_2x + b_2y + c_2z = d_2 \\ a_3x + b_3y + c_3z = d_3 \end{cases}$$

☞ Để giải hệ phương trình trên ta có thể dùng phương pháp thế hoặc phương pháp cộng đã học ở lớp 9.

II. BÀI TOÁN ÁP DỤNG

Bài 1. Giải và biện luận hệ phương trình sau:

$$\begin{cases} mx + y = m + 1 \\ x + my = 2 \end{cases}$$

Giải

Ta có các định thức:

$$D = \begin{vmatrix} m & 1 \\ 1 & m \end{vmatrix} = m^2 - 1 = (m-1)(m+1)$$

$$D_x = \begin{vmatrix} m+1 & 1 \\ 2 & m \end{vmatrix} = m^2 + m - 2 = (m-1)(m+2)$$

$$D_y = \begin{vmatrix} m & m+1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = m - 1$$

• $D \neq 0 \Leftrightarrow m \neq \pm 1$

$$\begin{cases} x = \frac{D_x}{D} = \frac{(m-1)(m+2)}{(m-1)(m+1)} = \frac{m+2}{m+1} \\ y = \frac{D_y}{D} = \frac{m-1}{(m-1)(m+1)} = \frac{1}{m+1} \end{cases}$$

Hệ phương trình có nghiệm duy nhất $\left(\frac{m+2}{m+1}, \frac{1}{m+1} \right)$

• $D = 0 \Leftrightarrow m = \pm 1$

➤ Khi $m = -1 \Rightarrow D = 0, D_x \neq 0$: hệ phương trình vô nghiệm

➤ Khi $m = 1 \Rightarrow D = D_x = D_y$: hệ phương trình trở thành

$$\begin{cases} x + y = 2 \\ x + y = 2 \end{cases} \Leftrightarrow x + y = 2 \Leftrightarrow \begin{cases} x \in \mathbb{R} \\ y = 2 - x \end{cases}$$

Vậy: $m \neq \pm 1$: hệ có nghiệm duy nhất $\left(\frac{m+2}{m+1}, \frac{1}{m+1} \right)$

$m = -1$: Hệ vô nghiệm

$m = 1$: Hệ có vô số nghiệm (x, y) sao cho $\begin{cases} x \in \mathbb{R} \\ y = 2 - x \end{cases}$

BÀI TẬP**Bài 1.** Bằng định thức, giải các hệ phương trình sau:

a)
$$\begin{cases} 5x - 7y = 5 \\ 2x + 9y = 1 \end{cases}$$

b)
$$\begin{cases} \sqrt{3}x + 2y = 9 \\ \sqrt{2}x - 5y = 12 \end{cases}$$

Bài 2. Giải các hệ phương trình sau:

a)
$$\begin{cases} \frac{4}{x} + \frac{1}{y-1} = 3 \\ \frac{2}{x} - \frac{2}{y-1} = 4 \end{cases}$$

b)
$$\begin{cases} \frac{5}{a^2} + \frac{3}{b^2} = 47 \\ \frac{3}{a^2} + \frac{8}{b^2} = 84 \end{cases}$$

Bài 3. Giải và biện luận hệ phương trình sau:

a)
$$\begin{cases} x - my = 0 \\ mx - y = m + 1 \end{cases}$$

b)
$$\begin{cases} 2ax + 3y = 5 \\ (a+1)x + y = 0 \end{cases}$$

Bài 4. Giải hệ và kiểm tra nghiệm bằng máy tính bỏ túi:

$$\begin{cases} 2x - y + z = 5 \\ x + y + z = 5 \\ 3x + 2y + z = 24 \end{cases}$$

Bài 5. Cho hệ phương trình:
$$\begin{cases} x + my = 3m \\ mx + y = 2m + 1 \end{cases}$$

a) Giải và biện luận;

b) Tìm m để hệ có nghiệm duy nhất (x_0, y_0) sao cho $x_0, y_0 \in \mathbb{Z}$;c) Lập hệ thức liên hệ giữa x_0, y_0 độc lập với m .**Bài 6.** Tìm m để các hệ sau có nghiệm duy nhất:

a)
$$\begin{cases} x + my = 1 \\ mx - 3my = 2m + 3 \end{cases}$$

b)
$$\begin{cases} mx + y = 4 - m \\ 2x + (m-1)y = m \end{cases}$$

ÔN TẬP CHƯƠNG III**Bài 1.** Giải các phương trình:

a) $\sqrt{3x^2 - 2x - 1} = 3x + 1$

b) $2x - \sqrt{x-5} = 8 - \sqrt{x-5}$

c) $|2x-1| = |4x-7|$

d) $x^2 + 4x - 3|x+2| + 4 = 0$

Bài 2. Giải và biện luận phương trình: $m(mx-1) = x+1$ **Bài 3.** Cho phương trình: $(m-1)x^2 + 2x - 1 = 0$ a) Tìm các giá trị của m sao cho phương trình đó có hai nghiệm trái dấu ;b) Tìm các giá trị của m sao cho tổng bình phương của hai nghiệm của phương trình đó bằng 1.**Bài 4.** Cho phương trình: $x^2 + x - 4 = 0$

Tính: $A = x_1^2 + x_2^2$

$B = x_1^3 + x_2^3$

$C = x_1^2 x_2 + x_1 x_2^2$

$D = (2x_1 - x_2)(2x_2 - x_1)$

$E = \frac{x_1}{x_2} + \frac{x_2}{x_1}$

$F = \frac{1}{x_1^3} + \frac{1}{x_2^3}$

Bài 5. Giải các hệ phương trình:

$$\text{a) } \begin{cases} x^2 + y^2 + xy = 7 \\ xy + x + y = 5 \end{cases}$$

$$\text{b) } \begin{cases} 2(x + y)^2 - xy = 1 \\ x^2y + xy^2 = 0 \end{cases}$$

Bài 6. Tìm điều kiện để các hệ phương trình sau có nghiệm duy nhất:

$$\text{a) } \begin{cases} mx + 3 = m - 1 \\ 2x + (m - 1)y = 3 \end{cases}$$

$$\text{b) } \begin{cases} 5x + (a - 2)y = a \\ (a + 3)y + (a + 3)y = 2a \end{cases}$$

Bài 7. Cho phương trình: $mx^2 + 2(m + 3)x + m = 0$

Định m để phương trình:

a/ Có nghiệm;

b/ Có 2 nghiệm phân biệt cùng dấu;

c/ Có 2 nghiệm âm phân biệt.

❧ PHẦN HÌNH HỌC ❧**Chương I. VECTO**

§1. Các định nghĩa	32
§2. Tổng và hiệu của hai vector	36
§3. Tích của một vector với một số.....	40
§ 4. Hệ trục tọa độ.....	44

Chương II. TÍCH VÔ HƯỚNG CỦA HAI VECTO

§1. Giá trị lượng giác của một góc bất kì từ $0^\circ - 180^\circ$	50
§2. Tích vô hướng của 2 vec tơ.....	54

CHƯƠNG I. VECTƠ

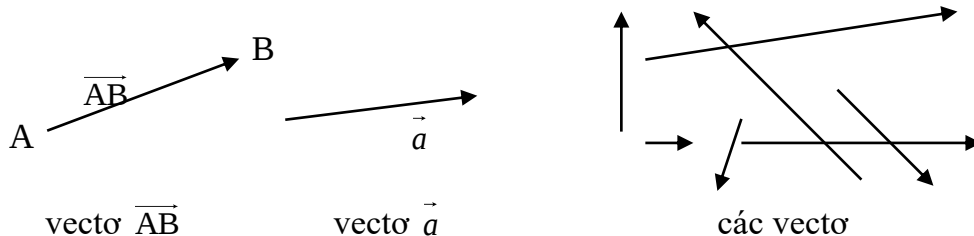
§1. CÁC ĐỊNH NGHĨA

I. KIẾN THỨC CƠ BẢN

1. **Vector:** Vector là một đoạn thẳng có hướng.

Kí hiệu: $\vec{a}, \vec{b}, \vec{x}, \vec{y}, \dots; \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{MN}, \dots$

vector $\overrightarrow{AB}$ thì A gọi là *điểm đầu*, B gọi là *điểm cuối*.



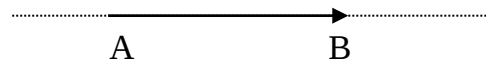
2. **Độ dài của một vector:** Độ dài của vector $\overrightarrow{AB}$ là độ dài của đoạn thẳng AB.

Kí hiệu: $|\overrightarrow{AB}|$ (đọc là độ dài của vector $\overrightarrow{AB}$)

Vậy: $|\overrightarrow{AB}| = AB = BA$

3. **Giá của một vector:** Giá của một vector là đường thẳng chứa vector đó.

Vậy: Giá của vector $\overrightarrow{AB}$ là đường thẳng AB.



TÓM LẠI: Vector $\overrightarrow{AB}$ có:

- Giá là đường thẳng AB (phương)
- Điểm đầu A, điểm cuối B (chiều từ A đến B)
- Độ dài $|\overrightarrow{AB}| = AB$ (độ dài)

4. **Vector – không:** Vector – không là vector có điểm đầu và điểm cuối trùng nhau.

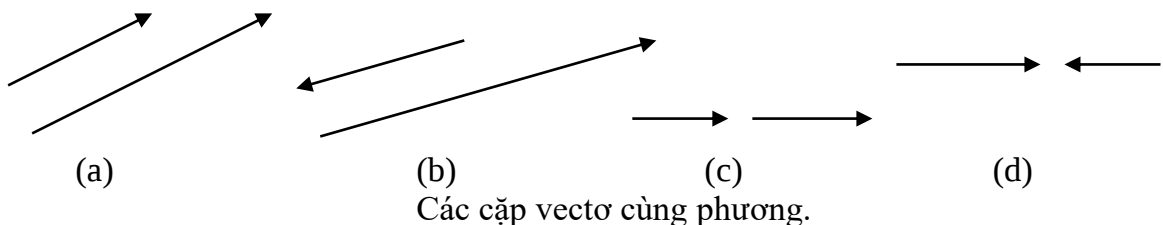
Kí hiệu: $\overrightarrow{AA}, \overrightarrow{MM}, \dots$ ký hiệu chung là $\vec{0}$.

5. **Hai vector cùng phương:** là hai vector có giá song song hoặc trùng nhau.

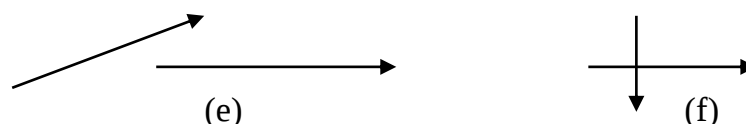
Như vậy:

- Nếu hai vector cùng cùng phương với một vector thứ 3 (khác vector – không) thì chúng cùng phương với nhau.
- Vector – không được xem là cùng phương với mọi vector.

Ví dụ 1. Các cặp vector cùng phương

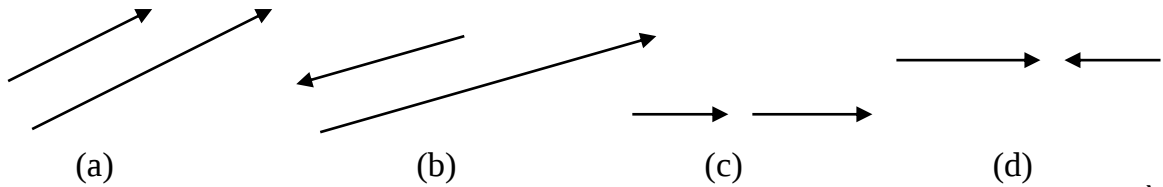


Ví dụ 2. Các cặp vector không cùng phương



6. **Hai vector cùng hướng, ngược hướng**

Xét các cặp vector cùng phương:



- Trường hợp (a) và (c) ta nói hai vector đó **cùng hướng** (cùng phương, cùng chiều)
- Trường hợp (b) và (d) ta nói hai vector đó **ngược hướng** (cùng phương, ngược chiều)

Như vậy:

- Nếu hai vector cùng phương thì hoặc chúng cùng hướng, hoặc chúng ngược hướng.
- Vector – không được xem là cùng hướng với mọi vector.

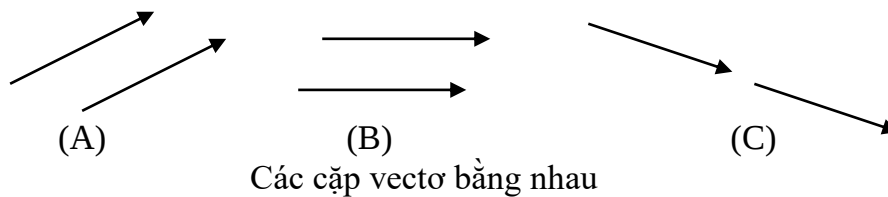
7. Hai vector bằng nhau: Hai vector được gọi là **bằng nhau** nếu chúng cùng hướng và cùng độ dài.

Kí hiệu: $\vec{a} = \vec{b}$; $\overline{AB} = \overline{CD}$.

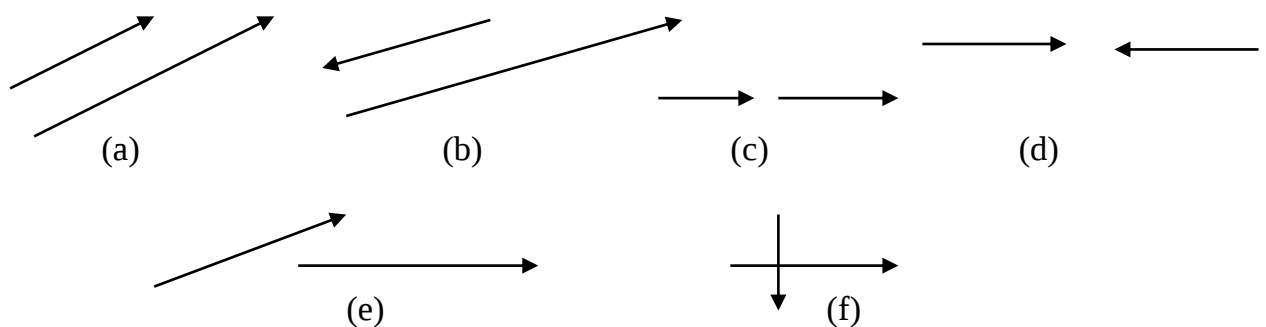
Như vậy:

$$\vec{a} = \vec{b} \Leftrightarrow \begin{cases} \vec{a}, \vec{b} \text{ cùng hướng} \\ |\vec{a}| = |\vec{b}| \end{cases}$$

Ví dụ 3: Các cặp vector bằng nhau



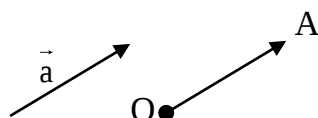
Ví dụ 4 : Các cặp vector không bằng nhau



- Các vector – không đều bằng nhau.

- Nếu $\begin{cases} \vec{a} = \vec{b} \\ \vec{b} = \vec{c} \end{cases} \Rightarrow \vec{a} = \vec{c}$ (T/C bắc cầu)

- Nếu cho trước vector $\vec{a}$ và một điểm O thì tồn tại duy nhất điểm A sao cho $\overrightarrow{OA} = \vec{a}$.



II. BÀI TẬP ÁP DỤNG

Bài 1. Cho tam giác ABC đều, cạnh dài 3 cm.

- Liệt kê các vector khác vector – không có điểm đầu và điểm cuối là đỉnh của tam giác ABC.
- Hãy chỉ ra các vector cùng phương với nhau (nếu có).
- Hãy chỉ ra các vector cùng hướng với nhau (nếu có).
- Tính độ dài các vector.
- Các vector đã nêu có bằng nhau không? Tại sao?

Giải

- Liệt kê các vector :

$\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{BA}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{CA}, \overrightarrow{BC}, \overrightarrow{CB}$

- Các cặp vector cùng phương:

$\overrightarrow{AB}$ và $\overrightarrow{BA}$

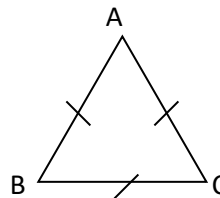
$\overrightarrow{AC}$ và $\overrightarrow{CA}$

$\overrightarrow{BC}$ và $\overrightarrow{CB}$

- Không có vector nào cùng hướng với nhau.

- Vì tam giác ABC đều cạnh dài 3 cm nên các vector này đều có độ dài bằng 3 cm

- Các vector kể trên không có vector nào bằng nhau vì chúng không cùng hướng (mặc dù có cùng độ dài)



Ví dụ 2: Cho hình bình hành ABCD, có O là giao điểm hai đường chéo.

- Hãy chỉ ra các vector khác vector – không bằng nhau.
- Xác định điểm E sao cho $\overrightarrow{BE} = \overrightarrow{AC}$. Hỏi tứ giác ABEC là hình gì? Tại sao?

Giải

- Các vector bằng nhau:

$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}, \overrightarrow{BA} = \overrightarrow{CD}$

$\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BC}, \overrightarrow{DA} = \overrightarrow{CB}$

$\overrightarrow{AO} = \overrightarrow{OC}, \overrightarrow{OA} = \overrightarrow{CO}$

$\overrightarrow{BO} = \overrightarrow{OD}, \overrightarrow{OB} = \overrightarrow{DO}$

- Xác định điểm E :

Vì $\overrightarrow{BE} = \overrightarrow{AC}$ nên điểm E thuộc đường thẳng qua B song song AC và thỏa vector $\overrightarrow{BE}$ cùng chiều với vector $\overrightarrow{AC}$, $BE = AC$.

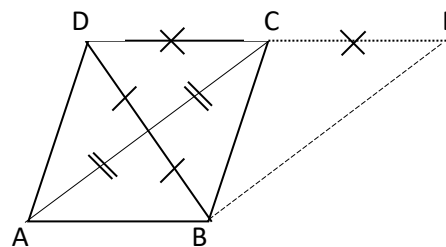
Điểm E xác định được là duy nhất

□ Tứ giác ABEC là hình bình hành.

Thật vậy:

Ta có $\overrightarrow{BE} = \overrightarrow{AC}$

$$\Rightarrow \begin{cases} \overrightarrow{BE} \text{ cùng hướng } \overrightarrow{AC} \\ |\overrightarrow{BE}| = |\overrightarrow{AC}| \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} BE // AC \\ BE = AC \end{cases} \Rightarrow \text{tứ giác ABEC là hình bình hành.}$$



BÀI TẬP

Bài 1. Cho hình vuông ABCD. Liệt kê tất cả các vector bằng nhau.

Bài 2. Cho tam giác ABC. Các điểm M, N, I lần lượt là trung điểm các cạnh AB, AC, BC. Tìm các cặp vector bằng nhau.

Bài 3. Cho tam giác ABC. Hãy dựng các điểm D và E sao cho: $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{AE} = \overrightarrow{CB}$.

Nhận xét gì về hai vector $\overrightarrow{AD}$ và $\overrightarrow{AE}$

Bài 4. Cho tam giác ABC cân ở A, đường cao AH. Các mệnh đề sau đây đúng hay sai? (giải thích)

a) $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AC}$ b) $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CA}$ c) $|\overrightarrow{AB}| = |\overrightarrow{AC}|$ d) $\overrightarrow{BH} = \overrightarrow{HC}$

Bài 5. Cho ba vector $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ cùng phương. Chứng tỏ rằng có ít nhất hai vector trong chúng có cùng hướng.

Bài 6. Chứng minh rằng: Nếu A, B, C là ba điểm phân biệt và $\overrightarrow{AB}$ cùng phương $\overrightarrow{AC}$ thì ba điểm A, B, C thẳng hàng.

Bài 7. Cho tứ giác ABCD. Chứng minh: Tứ giác ABCD là hình bình hành $\Leftrightarrow \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$.

Bài 8. Hãy nêu dấu hiệu nhận biết một tứ giác là hình thoi bằng kiến thức về vector.

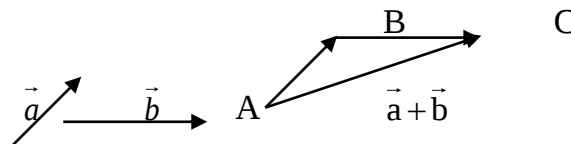
§2. TỔNG VÀ HIỆU CỦA HAI VECTO

I. KIẾN THỨC CƠ BẢN

1. Định nghĩa: Cho hai vectơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$. Từ một điểm A nào đó ta vẽ $\overrightarrow{AB} = \vec{a}$, rồi từ điểm B ta vẽ tiếp $\overrightarrow{BC} = \vec{b}$. Khi đó $\overrightarrow{AC}$ được gọi là *tổng của hai vectơ* $\vec{a}$ và $\vec{b}$.

Kí hiệu: $\vec{a} + \vec{b}$

Như vậy: $\vec{a} + \vec{b} = \overrightarrow{AC}$



2. Các tính chất

- Tính chất giao hoán: $\vec{a} + \vec{b} = \vec{b} + \vec{a}$
- Tính chất kết hợp: $(\vec{a} + \vec{b}) + \vec{c} = \vec{a} + (\vec{b} + \vec{c})$
- Tính chất cộng với vectơ – không: $\vec{a} + \vec{0} = \vec{a}$

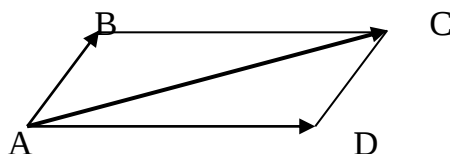
3. Các qui tắc cộng

a. Qui tắc ba điểm:

Với ba điểm A, B, C bất kỳ ta luôn có: $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$

b. Qui tắc hình bình hành:

Nếu ABCD là hình bình hành thì $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AC}$



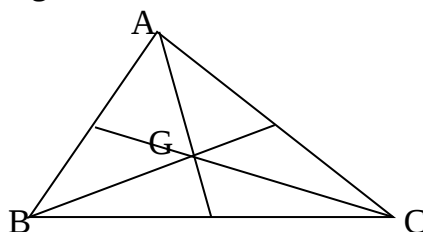
c. Qui tắc trung điểm:

Nếu I là trung điểm đoạn thẳng AB thì $\overrightarrow{IA} + \overrightarrow{IB} = \vec{0}$



d. Qui tắc trọng tâm:

Nếu G là trọng tâm tam giác ABC thì $\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} = \vec{0}$

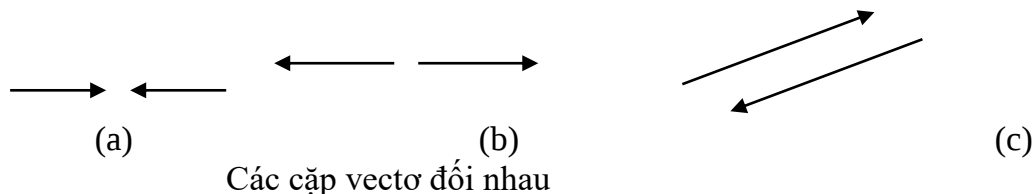


4. Vectơ đối của một vectơ

Nếu $\vec{a} + \vec{b} = \vec{0}$ thì hai vectơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$ gọi là *hai vectơ đối nhau*.

Vectơ đối của vectơ $\vec{a}$ được kí hiệu là $-\vec{a}$.

Ví dụ 1. Các cặp vectơ đối nhau



Như vậy:

$$\vec{b} = -\vec{a}$$

- ☐ $\vec{a} + (-\vec{a}) = (-\vec{a}) + \vec{a} = \vec{0}$
- ☐ $\vec{a}$ và $\vec{b}$ đối nhau $\Leftrightarrow \begin{cases} \vec{a}, \vec{b} \text{ ngược hướng} \\ |\vec{a}| = |\vec{b}| \end{cases}$
- ☐ Vector – không có vector đối là chính nó.
- ☐ Vector $\overrightarrow{AB}$ có vector đối là $\overrightarrow{BA}$, tức là $\overrightarrow{AB} = -\overrightarrow{BA}$

5. Hiệu của hai vector

Hiệu của hai vector $\vec{a}$ và $\vec{b}$ là tổng của vector $\vec{a}$ và vector đối của $\vec{b}$.

Kí hiệu: $\vec{a} - \vec{b}$

Như vậy: $\vec{a} - \vec{b} = \vec{a} + (-\vec{b})$

6. Bài toán dựng vector hiệu

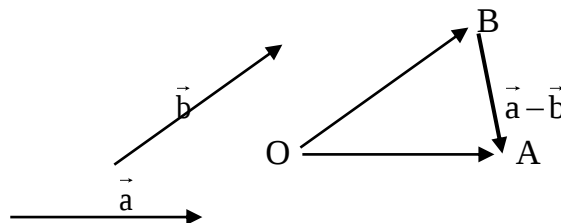
Cho $\vec{a}$ và $\vec{b}$. Hãy dựng vector hiệu $\vec{a} - \vec{b}$.

Giải

Cách dựng:

- Lấy một điểm O tùy ý
- Từ O vẽ $\overrightarrow{OA} = \vec{a}$
- Cũng từ O vẽ $\overrightarrow{OB} = \vec{b}$

Khi đó: $\overrightarrow{BA} = \vec{a} - \vec{b}$



Chứng minh:

$$\begin{aligned} \text{Thật vậy: } \overrightarrow{BA} &= \overrightarrow{BO} + \overrightarrow{OA} \text{ (quy tắc ba điểm)} \\ &= \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{BO} \text{ (giao hoán)} \\ &= \overrightarrow{OA} + (-\overrightarrow{OB}) \text{ (vector đối)} \\ &= \vec{a} - \vec{b} \end{aligned}$$

8. Quy tắc trừ

Cho vector $\overrightarrow{AB}$ và một điểm O tùy ý, ta có:

- ☐ $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA}$ (Chèn điểm O bên trái)
- ☐ $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AO} - \overrightarrow{BO}$ (Chèn điểm O bên phải)

Ví dụ 2. Cho hình thoi ABCD có $\angle B = 60^\circ$ và một điểm M tùy ý.

- a. Tính: $\overrightarrow{MB} - \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{BC}$.
- b. Tính $|\overrightarrow{BA} - \overrightarrow{BD}|, |\overrightarrow{BA} - \overrightarrow{BC}|$.

Giải :

a. Ta có: $\underbrace{\overrightarrow{MB} - \overrightarrow{MA}}_{\overrightarrow{AB}} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$

b. Tính các độ dài:

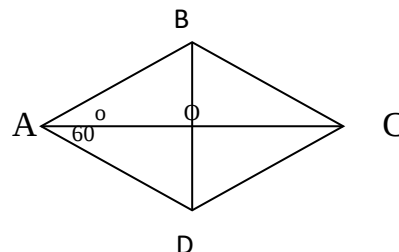
- ☐ $|\overrightarrow{BA} - \overrightarrow{BD}| = |\overrightarrow{DA}| = DA = a$
- ☐ $|\overrightarrow{BA} - \overrightarrow{BC}| = |\overrightarrow{CA}| = CA$

- Tính AC:

Gọi O là giao điểm hai đường chéo của hình thoi ABCD

$$\Rightarrow AC = 2AO$$

Dễ thấy AO là đường cao của tam giác đều ABD



$$\Rightarrow AO = \frac{a\sqrt{3}}{2}$$

$$\Rightarrow AC = a\sqrt{3}$$

$$\text{Vậy: } |\overrightarrow{BA} - \overrightarrow{BC}| = CA = a\sqrt{3}.$$

II. BÀI TẬP ÁP DỤNG

DẠNG 1:

Tính tổng của hai hay nhiều vector

PHƯƠNG PHÁP

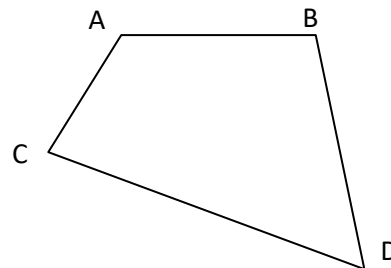
Sử dụng các tính chất và các qui tắc cộng để thực hiện tính tổng các vector theo yêu cầu.

Ví dụ 1: Cho tứ giác ABCD, tính:

a) $\vec{u} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CD}$

b) $\vec{v} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{DA}$

Giải



a) Áp dụng qui tắc ba điểm:

$$\begin{aligned}\vec{u} &= (\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}) + \overrightarrow{CD} \\ &= \underbrace{\overrightarrow{AC}}_{\overrightarrow{AD}} + \overrightarrow{CD} \\ &= \overrightarrow{AD}\end{aligned}$$

b) Ta có: $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{DA} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{DA}$ (giao hoán)
 $= (\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}) + (\overrightarrow{CD} + \overrightarrow{DA})$ (kết hợp)
 $= \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CA}$ (quy tắc ba điểm)
 $= \overrightarrow{AA} = \vec{0}$ (quy tắc ba điểm).

DẠNG 2:

Tính độ dài của vector tổng: Tính $|\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}|$

PHƯƠNG PHÁP

- Sử dụng các qui tắc và các tính chất của phép cộng để tính tổng $\vec{a} + \vec{b} + \vec{c} = \vec{d}$.
- Tính độ dài vector $\vec{d}$ bằng các kiến thức hình học phẳng đã được học.

Ví dụ 1: Cho tam giác ABC vuông tại A, biết $AB = 3$, $AC = 4$.

a. Tính độ dài cạnh BC

b. Tính $|\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}|$, $|\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CA}|$, $|\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}|$

Giải

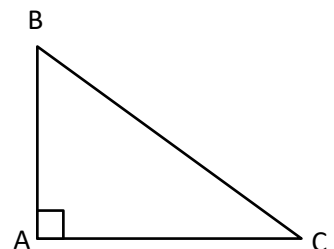
a. Tính độ dài cạnh BC:

$$\begin{aligned}\text{Tam giác ABC vuông tại A} &\Rightarrow BC^2 = AB^2 + AC^2 \\ &= 3^2 + 4^2 = 5^2\end{aligned}$$

$$\Rightarrow BC = 5$$

b. Tính độ dài các vector tổng :

$$\begin{aligned}\square \text{ Ta có: } \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} &= \overrightarrow{AC} \\ \Rightarrow |\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}| &= |\overrightarrow{AC}| = AC = 4\end{aligned}$$



□ Ta có: $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CA} = \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CB}$

$$\Rightarrow |\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CA}| = |\overrightarrow{CB}| = CB = 5$$

□ Áp dụng qui tắc hình bình hành, ta có:

$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AD}$ (D: là đỉnh hình bình hành ABDC)

$$\Rightarrow |\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}| = |\overrightarrow{AD}| = AD$$

Mặt khác, hình bình hành ABDC có $BC = 90^\circ \Rightarrow ABDC$ là hình chữ nhật

$$\Rightarrow AD = BC = 5$$

$$\text{Vậy: } |\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}| = AD = 5$$

DẠNG 3:

Chứng minh đẳng thức vector (A, B là các biểu thức vector)

Ví dụ 1: Cho bốn điểm, A, B, C, D. Chứng minh rằng: $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{CB}$

Giải

Ta có:

$$\begin{aligned} VT &= \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DB} + \overrightarrow{CD} \\ &= \overrightarrow{AD} + \underbrace{\overrightarrow{CD} + \overrightarrow{DB}}_{\overrightarrow{CB}} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{CB} \\ &= VP \text{ (đpcm).} \end{aligned}$$

BÀI TẬP

Bài 1. Cho 5 điểm A, B, C, D, E tùy ý. Tính các vector tổng sau:

a. $\vec{u} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{DE}$ b. $\vec{v} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{DE} + \overrightarrow{BD} + \overrightarrow{EA}$

Bài 2. Cho tam giác ABC đều cạnh bằng a. Tính độ dài của vector tổng $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}$.

Bài 3. Cho hình thang ABCD có cạnh đáy $AB = 2a$, $CD = a$. I là trung điểm của AD. Tính $|\overrightarrow{IB} + \overrightarrow{IC}|$.

Bài 4. Chứng minh rằng nếu $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$ thì $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{BD}$.

Bài 5. Tứ giác ABCD là hình gì nếu $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$ và $|\overrightarrow{AB}| = |\overrightarrow{BC}|$?

Bài 6. Cho bốn điểm bất kỳ M, N, P, Q. Chứng minh các đẳng thức sau:

a. $\overrightarrow{PQ} + \overrightarrow{NP} + \overrightarrow{MN} = \overrightarrow{MQ}$ b. $\overrightarrow{NP} + \overrightarrow{MN} = \overrightarrow{QP} + \overrightarrow{MQ}$ c. $\overrightarrow{MN} + \overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{MQ} + \overrightarrow{PN}$

Bài 7. Cho 6 điểm A, B, C, D, E, F. Chứng minh: $\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{BE} + \overrightarrow{CF} = \overrightarrow{AE} + \overrightarrow{BF} + \overrightarrow{CD}$.

Bài 8. Chứng minh rằng với hai vector không cùng phương $\vec{a}$ và $\vec{b}$, ta có:

$$|\vec{a}| - |\vec{b}| < |\vec{a} + \vec{b}| < |\vec{a}| + |\vec{b}|$$

Bài 9. Cho tam giác ABC. Các điểm M, N, P lần lượt là trung điểm các cạnh AB, AC, BC. Chứng minh rằng với điểm O bất kỳ ta có: $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OM} + \overrightarrow{ON} + \overrightarrow{OP}$.

Bài 10. Cho bốn điểm A, B, C, D. Chứng minh đẳng thức: $\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{DB}$.

Bài 11. Cho hình bình hành ABCD, M là một điểm tùy ý.

Chứng minh rằng: $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MC} = \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MD}$

Bài 12. Cho ngũ giác ABCDE. Chứng minh: $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{AE} - \overrightarrow{DE}$.

Bài 13. Cho hình thang ABCD có cạnh đáy $AB = a$, $CD = 2a$. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của AD và BC. Tính $|\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MC} - \overrightarrow{MN}|$.

Bài 14. Cho sáu điểm A, B, C, D, E, F. Chứng minh rằng: $\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{BE} + \overrightarrow{CF} = \overrightarrow{AF} + \overrightarrow{BD} + \overrightarrow{CE}$

Bài 15. Cho tam giác ABC đều cạnh a, H là trung điểm cạnh BC. Tính $|\overrightarrow{CA} - \overrightarrow{HC}|$.

§3. TÍCH CỦA MỘT VECTOR VỚI MỘT SỐ

I. KIẾN THỨC CƠ BẢN

1. Định nghĩa. Tích của một số thực k với vector $\vec{a}$ là một vector, kí hiệu là $k\vec{a}$, được xác định như sau:

- Nếu $k \geq 0$ thì vector $k\vec{a}$ cùng hướng với vector $\vec{a}$;
- Nếu $k < 0$ thì vector $k\vec{a}$ ngược hướng với vector $\vec{a}$

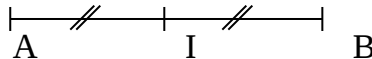
$$|k\vec{a}| = |k| \cdot |\vec{a}|$$

Ví dụ 1: Cho I là trung điểm đoạn thẳng AB . Khi đó,

$$\vec{AB} = 2\vec{AI}$$

$$\vec{AB} = -2\vec{BI}$$

$$\vec{AI} = \frac{1}{2}\vec{AB}$$



2. Các tính chất

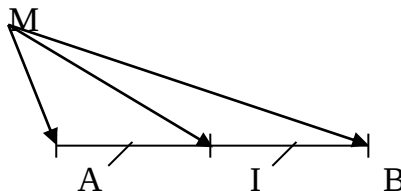
Cho hai vector $\vec{a}$, $\vec{b}$ và các số thực k , l tùy ý, ta có:

- $k(l\vec{a}) = (kl)\vec{a}$
- $(k+l)\vec{a} = k\vec{a} + l\vec{a}$
- $k(\vec{a} + \vec{b}) = k\vec{a} + k\vec{b}$; $k(\vec{a} - \vec{b}) = k\vec{a} - k\vec{b}$;
- $k\vec{a} = \vec{0} \Leftrightarrow k = 0$ hoặc $\vec{a} = \vec{0}$

3. Các qui tắc

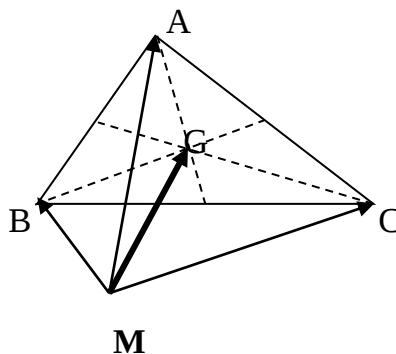
a. Qui tắc trung điểm:

Điểm I là trung điểm đoạn thẳng $AB \Leftrightarrow \vec{MA} + \vec{MB} = 2\vec{MI}$ (M là điểm tùy ý)



b. Qui tắc trọng tâm:

Điểm G là trọng tâm của tam giác $ABC \Leftrightarrow \vec{MA} + \vec{MB} + \vec{MC} = 3\vec{MG}$ (M là điểm tùy ý)



4. Điều kiện cùng phương của hai vector

Vector $\vec{a}$ cùng phương với $\vec{b} \neq \vec{0} \Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{R} : \vec{a} = k\vec{b}$

5. Điều kiện để ba điểm thẳng hàng

Ba điểm A, B, C thẳng hàng $\Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{R} : \vec{AB} = k\vec{AC}$

6. Biểu thị một vector theo hai vector không cùng phương

Định lý: Cho hai vector không cùng phương $\vec{a}$ và $\vec{b}$. Khi đó mọi vector $\vec{x}$ đều có thể biểu thị một cách duy nhất qua hai vector $\vec{a}$ và $\vec{b}$, nghĩa là có duy nhất cặp số m và n sao cho $\vec{x} = m\vec{a} + n\vec{b}$.

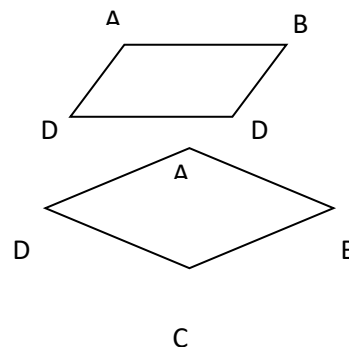
II. BÀI TẬP ÁP DỤNG

DẠNG 1: Chứng minh một dấu hiệu hình học.

PHƯƠNG PHÁP

Sử dụng các điều kiện tương ứng như:

1. Tứ giác ABCD là hình bình hành $\Leftrightarrow \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$
 $\Leftrightarrow \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AC}$
2. Tứ giác ABCD là hình thoi $\Leftrightarrow \begin{cases} \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC} \\ |\overrightarrow{AB}| = |\overrightarrow{AD}| \end{cases}$



3. Ba điểm A, B, C thẳng hàng $\Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{R} : \overrightarrow{AB} = k\overrightarrow{AC}$

4. Đường thẳng AB song song với đường thẳng CD $\Leftrightarrow \begin{cases} C \notin AB \text{ (D} \notin AB) \\ \exists k \in \mathbb{R} : \overrightarrow{AB} = k\overrightarrow{CD} \end{cases}$

DẠNG 2: Xác định điểm M thỏa một đẳng thức vector cho trước.

PHƯƠNG PHÁP

- Biến đổi đẳng thức cho về dạng $\overrightarrow{AM} = \vec{v}$
 (trong đó A là điểm cố định, $\vec{v}$ là vector không đổi)
- Lấy A làm điểm đầu, dựng $\overrightarrow{AM} = \vec{v}$.
- Điểm cuối M là điểm cần xác định.
 - Trường hợp đặc biệt:
 - $\overrightarrow{AM} = \vec{0} \Leftrightarrow M \equiv A$
 - $\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{AB} \Leftrightarrow M \equiv B$

DẠNG 3: Phân tích (biểu thị) vector $\vec{x}$ theo hai vector không cùng phương $\vec{a}, \vec{b}$.

PHƯƠNG PHÁP:

Sử dụng linh hoạt các qui tắc biến đổi vector (qt 3 điểm, qt hình bình hành, ...) để viết vector $\vec{x}$ dưới dạng $\vec{x} = m\vec{a} + n\vec{b}$.

Ví dụ 1: Cho tam giác ABC, trên ba cạnh AB, BC, CA lần lượt lấy 3 điểm M, N, P sao cho M là trung điểm AB, $\overrightarrow{BN} = \frac{1}{3}\overrightarrow{BC}$ và $\overrightarrow{AP} = \frac{3}{4}\overrightarrow{AC}$.

- a. Chứng minh rằng: $\overrightarrow{AN} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{3}\overrightarrow{AC}$;
- b. Biểu thị vector $\overrightarrow{MP}$ theo $\overrightarrow{AB}$ và $\overrightarrow{AC}$;
- c. Trên đoạn AN lấy điểm I sao cho $16\overrightarrow{AI} = 9\overrightarrow{AN}$. Chứng minh 3 điểm M, P, I thẳng hàng.

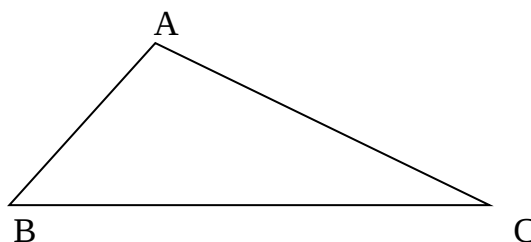
Giải

a. Chứng minh: $\overrightarrow{AN} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{3}\overrightarrow{AC}$

Ta có: $\overrightarrow{BN} = \frac{1}{3}\overrightarrow{BC}$ (giả thiết)

$$\Rightarrow \overrightarrow{AN} - \overrightarrow{AB} = \frac{1}{3}(\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB})$$

$$\Rightarrow \overrightarrow{AN} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{3}\overrightarrow{AC} \quad (\text{đpcm})$$



b. Biểu thị vector $\overrightarrow{MP}$ theo $\overrightarrow{AB}$ và $\overrightarrow{AC}$:

Ta có: M là trung điểm AB (gt) $\Rightarrow \overrightarrow{AM} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$

Khi đó:

$$\overrightarrow{MP} = \overrightarrow{AP} - \overrightarrow{AM} = \frac{3}{4}\overrightarrow{AC} - \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} \quad \text{hay} \quad \overrightarrow{MP} = -\frac{1}{2}\overrightarrow{AB} + \frac{3}{4}\overrightarrow{AC}$$

c. Chứng minh 3 điểm M, P, I thẳng hàng.

Ta có:

$$\begin{aligned} \overrightarrow{AI} &= \frac{9}{16}\overrightarrow{AN} = \frac{9}{16}\left(\frac{2}{3}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{3}\overrightarrow{AC}\right) \\ &= \frac{3}{8}\overrightarrow{AB} + \frac{3}{16}\overrightarrow{AC} \end{aligned}$$

Khi đó:

$$\begin{aligned} \overrightarrow{MI} &= \overrightarrow{AI} - \overrightarrow{AM} = \frac{3}{8}\overrightarrow{AB} + \frac{3}{16}\overrightarrow{AC} - \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} \\ &= -\frac{1}{8}\overrightarrow{AB} + \frac{3}{16}\overrightarrow{AC} = \frac{1}{4}\left(-\frac{1}{2}\overrightarrow{AB} + \frac{3}{4}\overrightarrow{AC}\right) \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \overrightarrow{MI} = \frac{1}{4}\overrightarrow{MP}$$

Vậy ba điểm M, P, I thẳng hàng.

BÀI TẬP

Bài 1. Gọi I là trung điểm của đoạn AB và O là điểm tùy ý. Chứng minh: $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} = 2\overrightarrow{OI}$

Bài 2. Cho tứ giác ABCD. Gọi I, J lần lượt là trung điểm hai đường chéo AC và BD. Chứng minh: $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD} = 2\overrightarrow{IJ}$.

Bài 3. Chứng minh G là trọng tâm của tam giác ABC khi và chỉ khi $\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} = \vec{0}$.

Bài 4. Cho G là trọng tâm của tam giác ABC, O là điểm tùy ý.

Chứng minh: $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} = 3\overrightarrow{OG}$.

Bài 5. Chứng minh rằng nếu G và G' lần lượt là trọng tâm của hai tam giác ABC và A'B'C' thì $3\overrightarrow{GG'} = \overrightarrow{AA'} + \overrightarrow{BB'} + \overrightarrow{CC'}$. Từ kết quả trên hãy suy ra điều kiện cần và đủ để hai tam giác ABC và A'B'C' có cùng trọng tâm.

Bài 6. Cho tứ giác ABCD. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của AD và BC. Chứng minh:

a. $\overrightarrow{MN} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{DC})$

b. $\overrightarrow{MN} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{DB})$

Bài 7. Cho hình bình hành ABCD. Chứng minh: $\overrightarrow{AB} + 2\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AD} = 3\overrightarrow{AC}$.

Bài 8. Cho tam giác ABC. Gọi M là một điểm trên đoạn BC sao cho: MB = 2MC.

Chứng minh rằng: $\overrightarrow{AM} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AB} + \frac{2}{3}\overrightarrow{AC}$

Bài 9. Cho tam giác ABC, hãy dựng các điểm M, N, P, Q thỏa:

a. $\overrightarrow{MA} + 2\overrightarrow{MB} = \vec{0}$

b. $\overrightarrow{PA} - \overrightarrow{PB} + \overrightarrow{PC} = \vec{0}$

c. $\overrightarrow{NA} + 2\overrightarrow{NB} - \overrightarrow{NC} = \overrightarrow{BA}$

d. $\overrightarrow{QA} + \overrightarrow{QB} + 2\overrightarrow{QC} = \vec{0}$

Bài 10. Cho tam giác ABC và 2 điểm I, J xác định bởi: $\overrightarrow{IA} + 3\overrightarrow{IC} = \vec{0}$ và $\overrightarrow{JA} + 2\overrightarrow{JB} + 3\overrightarrow{JC} = \vec{0}$.

Chứng minh rằng ba điểm I, J, B thẳng hàng.

Bài 11. Cho tam giác ABC. Điểm I trên cạnh AC sao cho $CI = \frac{1}{4}CA$, J là điểm mà

$$\overrightarrow{BJ} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AC} - \frac{2}{3}\overrightarrow{AB}.$$

a. Chứng minh: $\overrightarrow{BI} = \frac{3}{4}\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB}$

b. Chứng minh B, I, J thẳng hàng.

c. Hãy dựng điểm J thỏa điều kiện đầu bài.

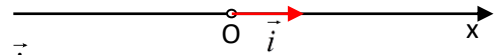
Bài 12. Cho lục giác đều tâm O có cạnh a.

a. Phân tích vector $\overrightarrow{AD}$ theo hai vector $\overrightarrow{AB}$ và $\overrightarrow{AF}$.

b. Tính độ dài của vector $\frac{1}{2}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{BC}$ theo a.

§4. HỆ TRỤC TỌA ĐỘ

I. KIẾN THỨC CƠ BẢN

1. Trục tọa độ: $(O, \vec{i})$ hay trục Ox

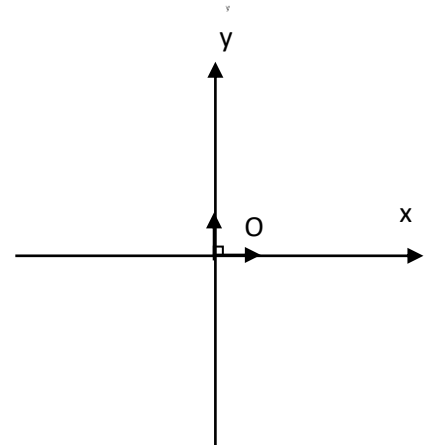
- a là tọa độ của $\vec{u}$ trên trục $(O, \vec{i}) \Leftrightarrow \vec{u} = a\vec{i}$
- Tọa độ của vectơ $\overrightarrow{AB}$ trên trục $(O, \vec{i})$ được ký hiệu là $\overline{AB}$ (đọc là độ dài đại số của vectơ $\overrightarrow{AB}$ trên trục Ox). Khi đó: $\overline{AB} = x_B - x_A$
- x_M là tọa độ của điểm M trên trục Ox $\Leftrightarrow \overrightarrow{OM} = x_M \vec{i}$

2. Hệ trục tọa độ: $(O, \vec{i}, \vec{j})$ hay hệ trục Oxy

a. Tọa độ của vectơ

- Tọa độ vectơ $\vec{u}$ được ký hiệu: $\vec{u} = (x, y) \Leftrightarrow \vec{u} = x\vec{i} + y\vec{j}$
 - Cho hai vectơ $\vec{a} = (x; y)$ và $\vec{b} = (x'; y')$
- 1) $\vec{a} + \vec{b} = (x + x'; y + y')$; $\vec{a} - \vec{b} = (x - x'; y - y')$
 - 2) $k\vec{a} = (kx; ky)$

$$3) \text{ Điều kiện bằng nhau: } \vec{a} = \vec{b} \Leftrightarrow \begin{cases} x = x' \\ y = y' \end{cases}$$



$$4) \text{ Điều kiện cùng phương: } \vec{a} \text{ cùng phương } \vec{b} \ (\vec{a}, \vec{b} \neq \vec{0}) \Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{R} : \begin{cases} x = kx' \\ y = ky' \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow x.y' - y.x' = 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{x}{x'} = \frac{y}{y'} \ (x', y' \neq 0)$$

b. Tọa độ điểm

- Tọa độ điểm M được ký hiệu: $M(x_M; y_M) \Leftrightarrow \overrightarrow{OM} = x_M \vec{i} + y_M \vec{j}$
 - Cho ba điểm $A(x_A; y_A)$, $B(x_B; y_B)$, $C(x_C; y_C)$.
- 1). $\overrightarrow{AB} = (x_B - x_A; y_B - y_A)$

$$2) I \text{ là trung điểm } AB \Leftrightarrow \begin{cases} x_I = \frac{x_A + x_B}{2} \\ y_I = \frac{y_A + y_B}{2} \end{cases}$$

$$3) G \text{ là trọng tâm của tam giác } ABC \Leftrightarrow \begin{cases} x_G = \frac{x_A + x_B + x_C}{3} \\ y_G = \frac{y_A + y_B + y_C}{3} \end{cases}$$

4) Tọa độ các điểm đối xứng :

- A_1 đối xứng với A qua Ox $\Rightarrow A_1(x_A; -y_A)$
- A_2 đối xứng với A qua Oy $\Rightarrow A_2(-x_A; y_A)$
- A_3 đối xứng với A qua O $\Rightarrow A_3(-x_A; -y_A)$

II. BÀI TẬP ÁP DỤNG

DẠNG 1:

Xác định tọa độ điểm, tọa độ vectơ thỏa điều kiện cho trước.

PHƯƠNG PHÁP :

Tùy trường hợp cụ thể mà ta sử dụng các điều kiện vector tương ứng.

Nhắc lại một số trường hợp thường gặp :

- Ba điểm A, B, C **thẳng hàng** $\Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{R} : \overrightarrow{AB} = k\overrightarrow{AC}$
- Tứ giác ABCD là **hình bình hành** $\Leftrightarrow \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$

Ví dụ 1: Cho ba điểm A(-1 ; 2), B(1 ; 4), C(3 ; 1)

- Xác định tọa độ trung điểm cạnh BC.
- Xác định tọa độ trọng tâm của tam giác ABC.
- Tìm tọa độ điểm D để tứ giác ABCD là hình bình hành.
- Gọi M là giao điểm của AB với Oy. Xác định tọa độ điểm M.
- E là điểm thỏa: $\overrightarrow{AE} + 2\overrightarrow{BE} - 5\overrightarrow{CE} = \vec{0}$. Tìm tọa độ điểm E.

Giải

- Xác định tọa độ trung điểm cạnh BC

$$I \text{ là trung điểm đoạn BC } \Leftrightarrow \begin{cases} x_I = \frac{x_B + x_C}{2} = \frac{1+3}{2} = 2 \\ y_I = \frac{y_B + y_C}{2} = \frac{4+1}{2} = \frac{5}{2} \end{cases} \Leftrightarrow I\left(2; \frac{5}{2}\right)$$

- Xác định tọa độ trọng tâm của tam giác ABC

$$G \text{ trọng tâm của tam giác ABC } \Leftrightarrow \begin{cases} x_G = \frac{x_A + x_B + x_C}{3} \\ y_G = \frac{y_A + y_B + y_C}{3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_G = \frac{-1+1+3}{3} = 1 \\ y_G = \frac{2+4+1}{3} = \frac{7}{3} \end{cases} \Leftrightarrow G\left(1; \frac{7}{3}\right)$$

- Tìm tọa độ điểm D để tứ giác ABCD là hình bình hành.

Giả sử D(x; y). Ta có:

$$\overrightarrow{AD} = (x+1; y-2); \quad \overrightarrow{BC} = (3-1; 1-4) = (2; -3)$$

$$\text{Tứ giác ABCD là hình bình hành } \Leftrightarrow \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BC} \Leftrightarrow \begin{cases} x+1=2 \\ y-2=-3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=1 \\ y=-1 \end{cases}$$

Vậy D(1 ; -1).

- Gọi M là giao điểm của AB với Oy. Xác định tọa độ điểm M.

Vì M $\in$ Oy, M $\in$ AB nên M(0 ; y) và $\overrightarrow{AM}$ **cùng phương** với $\overrightarrow{AB}$

Ta có: $\overrightarrow{AM} = (1; y-2)$

$$\overrightarrow{AB} = (1+1; 4-2) = (2; 2)$$

$$\text{Khi đó: } 1.2 - 2.(y-2) = 0$$

- y = 3
- M(0 ; 3).

- E là điểm thỏa: $\overrightarrow{AE} + 2\overrightarrow{BE} - 5\overrightarrow{CE} = \vec{0}$. Tìm tọa độ điểm E.

Giả sử E(x ; y). Ta có:

$$\overrightarrow{AE} = (x+1; y-2); \quad \overrightarrow{BE} = (x-1; y-4); \quad \overrightarrow{CE} = (x-3; y-1)$$

Khi đó:

$$\overrightarrow{AE} + 2\overrightarrow{BE} - 5\overrightarrow{CE} = \vec{0}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x+1+2(x-1)-5(x-3)=0 \\ y-2+2(y-4)-5(y-1)=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=7 \\ y=-\frac{5}{2} \end{cases} \Leftrightarrow E\left(7; -\frac{5}{2}\right)$$

Ví dụ 2: Cho ba vector $\vec{a} = (2; 5)$, $\vec{b} = (4; 1)$, $\vec{c} = (0; 5)$

- Xác định tọa độ của $\vec{v} = 3\vec{a} - \vec{b} + \vec{c}$
- Xác định hai số m, n sao cho $\vec{a} = m\vec{b} + n\vec{c}$

Giải

- Xác định tọa độ của $\vec{v} = 3\vec{a} - \vec{b} + \vec{c}$

Gọi $(x; y)$ là tọa độ của vector $\vec{v}$

$$\vec{v} = 3\vec{a} - \vec{b} + \vec{c}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 3.2 - 4 + 0 \\ y = 3.5 - 1 + 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \\ y = 19 \end{cases} \Leftrightarrow \vec{v} = (2; 19)$$

- Xác định hai số m, n sao cho $\vec{a} = m\vec{b} + n\vec{c}$

Ta có:

$$\vec{a} = m\vec{b} + n\vec{c}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2 = m.1 + n.0 \\ 5 = m.4 + n.5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m = 2 \\ n = -\frac{3}{5} \end{cases}$$

DANG 2:

Chứng minh một dấu hiệu hình học.

PHƯƠNG PHÁP

Chỉ việc chứng minh điều kiện vector tương ứng. Lưu ý sử dụng các công thức tọa độ.

Ví dụ 1: Cho ba điểm $A(1; 2)$, $B(0; 3)$, $C(5; -2)$. Chứng minh ba điểm A, B, C thẳng hàng.

Giải

Ta có: $\overrightarrow{AB} = (-1; 1)$, $\overrightarrow{AC} = (4; -4)$

$$\Rightarrow \overrightarrow{AC} = -4\overrightarrow{AB}$$

$\Rightarrow$ Ba điểm A, B, C thẳng hàng. (đpcm)

BÀI TẬP

Bài 1. Viết tọa độ các vector sau:

$$\vec{a} = 2\vec{i} + 5\vec{j}; \quad \vec{b} = -5\vec{i} + \frac{1}{2}\vec{j}; \quad \vec{c} = \vec{i} - \vec{j}; \quad \vec{d} = 2\vec{j}$$

Bài 2. Cho $\vec{a} = (1; 2)$, $\vec{b} = (0; 3)$. Tìm tọa độ của các vector:

$$\text{a. } \vec{x} = \vec{a} + \vec{b} \quad \text{b. } \vec{y} = \vec{a} - \vec{b} \quad \text{c. } \vec{z} = 3\vec{a} + \frac{1}{2}\vec{b}$$

Bài 3. Tìm tọa độ điểm B trong các trường hợp sau:

$$\begin{array}{ll} \text{a. } \overrightarrow{OB} = -5\vec{i} + 3\vec{j} & \text{b. } \overrightarrow{OB} = \vec{j} - \vec{i} \\ \text{c. } \overrightarrow{AB} = (2; -2) \text{ và } A(1; -3) & \text{d. } \overrightarrow{AB} = 2\vec{i} + 3\vec{j}; \quad \overrightarrow{OA} = -4\vec{i} \end{array}$$

Bài 4. Cho hình bình hành ABCD. Biết $A(1; -3)$, $B(3; 1)$, $C(5; -5)$.

- Tính tọa độ điểm D.
- Gọi I là tâm hình bình hành ABCD. Tính $|\overrightarrow{OI}|$ (với O là gốc tọa độ)

Bài 5. Cho $\vec{a} = (2; 1)$, $\vec{b} = (3; 4)$, $\vec{c} = (7; 2)$.

- Tìm tọa độ của vectơ $\vec{u} = 2\vec{a} - 3\vec{b} + \vec{c}$.
- Tìm tọa độ của vectơ $\vec{x}$ sao cho $\vec{x} + \vec{a} = \vec{b} - \vec{c}$.
- Tìm các số k, l để $\vec{c} = k\vec{a} + l\vec{b}$.

Bài 6. Cho ba điểm $A(-1; 1)$, $B(1; 3)$, $C(-2; 0)$. Chứng minh ba điểm A, B, C thẳng hàng.

Bài 7. Cho tam giác ABC có $A(-3; 6)$, $B(9; -10)$, $C(-5; 4)$.

- Tìm tọa độ trung điểm các cạnh của tam giác ABC.
- Tìm tọa độ trọng tâm G của tam giác ABC.
- Tìm tọa độ điểm D sao cho tứ giác BGCD là hình bình hành.
- A' là điểm đối xứng với A qua B. Tìm tọa độ điểm A' .

Bài 8. Cho bốn điểm $A(-2; -3)$, $B(3; 7)$, $C(0; 3)$, $D(-4; -5)$.

Chứng minh rằng hai đường thẳng AB và CD song song với nhau.

Bài 9. Cho tam giác ABC. Các điểm $M(1; 1)$, $N(2; 3)$, $P(0; -4)$ lần lượt là trung điểm các cạnh BC, CA, AB.

- Tính tọa độ các đỉnh của tam giác.
- Chứng minh hai tam giác ABC và MNP có trọng tâm trùng nhau.

Bài 10. Cho tam giác ABC có $A(1; -1)$, $B(5; -3)$ đỉnh C trên Oy và trọng tâm G trên Ox. Tìm tọa độ của C.

Bài 11. Cho ba điểm $A(-4; 1)$, $B(2; 4)$, $C(2; -2)$

- Chứng minh A, B, C là ba đỉnh của một tam giác.
- Tìm tọa độ trọng tâm G của tam giác ABC.
- Tìm tọa độ điểm D sao cho C là trọng tâm tam giác ABD.

Bài 12. Cho ba vectơ $\vec{a} = (2; -2)$, $\vec{b} = (1; 4)$, $\vec{c} = (5; 0)$. Hãy tìm hai số m, n sao cho $\vec{c} = m\vec{a} + n\vec{b}$.

Bài 13. Cho ba điểm $A(2; 5)$, $B(1; 1)$, $C(3; 3)$.

- Tìm tọa độ điểm D sao cho: $\overrightarrow{AD} = 3\overrightarrow{AB} - 2\overrightarrow{AC}$
- Tìm tọa độ điểm P sao cho: $3\overrightarrow{PA} + \overrightarrow{PB} - 2\overrightarrow{PC} = \overrightarrow{AC}$
- Tìm tọa độ điểm E sao cho ABCE là hình bình hành. Tìm tọa độ tâm hình bình hành đó.

ÔN TẬP CHƯƠNG I

I. KIẾN THỨC CƠ BẢN

1. Các phép toán: cộng, trừ hai vector; nhân một số với một vector.

2. Các qui tắc thực hành

a. *Qui tắc ba điểm:*

Với ba điểm A, B, C bất kỳ ta luôn có: $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}$ (chèn giữa)

b. *Qui tắc trừ:* Cho vector $\overrightarrow{AB}$ và một điểm O tùy ý, ta có:

$$\square \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA} \text{ (chèn trái)}$$

$$\square \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AO} - \overrightarrow{BO} \text{ (chèn phải)}$$

c. *Qui tắc hình bình hành:*

Tứ giác ABCD là hình bình hành $\Leftrightarrow \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BC}$

$$\Leftrightarrow \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AC}$$

d. *Qui tắc trung điểm:*

Điểm I là trung điểm đoạn thẳng AB $\Leftrightarrow \overrightarrow{IA} + \overrightarrow{IB} = \vec{0}$

$$\Leftrightarrow \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} = 2\overrightarrow{MI} \text{ (M: tùy ý)}$$

e. *Qui tắc trọng tâm:*

Điểm G là trọng tâm tam giác ABC $\Leftrightarrow \overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} = \vec{0}$

$$\Leftrightarrow \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} = 3\overrightarrow{MG} \text{ (M: tùy ý)}$$

3. Tọa độ của vector và điểm: Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho $\vec{a} = (x; y)$, $\vec{b} = (x'; y')$ và các điểm A($x_A; y_A$), B($x_B; y_B$), C($x_C; y_C$). Cho trước số thực k.

Khi đó, ta có các công thức sau:

a. $\vec{a} \pm \vec{b} = (x \pm x'; y \pm y')$

b. $k\vec{a} = (kx; ky)$

c. Điều kiện bằng nhau: $\vec{a} = \vec{b} \Leftrightarrow \begin{cases} x = x' \\ y = y' \end{cases}$

d. Điều kiện cùng phương: $\vec{a}$ cùng phương $\vec{b}$ ($\vec{a}, \vec{b} \neq \vec{0}$) $\Leftrightarrow x.y' - y.x' = 0$

e. $\overrightarrow{AB} = (x_B - x_A; y_B - y_A)$

f. I là trung điểm AB $\Leftrightarrow \begin{cases} x_I = \frac{x_A + x_B}{2} \\ y_I = \frac{y_A + y_B}{2} \end{cases}$

g. G là trọng tâm của tam giác ABC $\Leftrightarrow \begin{cases} x_G = \frac{x_A + x_B + x_C}{3} \\ y_G = \frac{y_A + y_B + y_C}{3} \end{cases}$

h. Tọa độ các điểm đối xứng:

○ A_1 đối xứng với A qua Ox $\Rightarrow A_1(x_A; -y_A)$

○ A_2 đối xứng với A qua Oy $\Rightarrow A_2(-x_A; y_A)$

○ A_3 đối xứng với A qua O $\Rightarrow A_3(-x_A; -y_A)$

○ A' đối xứng với A qua B $\Rightarrow A'(2x_B - x_A; 2y_B - y_A)$

II. BÀI TẬP

Bài 1. Gọi G là trọng tâm của tam giác ABC. Đặt $\vec{a} = \overrightarrow{GA}$, $\vec{b} = \overrightarrow{GB}$. Hãy biểu thị mỗi vectơ $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{GC}$, $\overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{CA}$ qua các vectơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$.

Bài 2. Gọi M, N lần lượt là trung điểm các đoạn thẳng AB và CD. Chứng minh rằng:

$$2\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BD} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{BC}.$$

Bài 3. Gọi O là tâm của hình bình hành ABCD. Chứng minh rằng với điểm M bất kỳ, ta có :

$$\overrightarrow{MO} = \frac{1}{4}(\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} + \overrightarrow{MD}).$$

Bài 4. Cho đoạn thẳng AB và điểm I sao cho $2\overrightarrow{IA} + 3\overrightarrow{IB} = \vec{0}$.

a. Tìm số k sao cho $\overrightarrow{AI} = k\overrightarrow{AB}$.

b. Chứng minh rằng với mọi điểm M, ta có : $\overrightarrow{MI} = \frac{2}{5}\overrightarrow{MA} + \frac{3}{5}\overrightarrow{MB}$.

Bài 5. Cho tam giác ABC.

a. Tìm các điểm M và N sao cho $\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} = \vec{0}$ và $2\overrightarrow{NA} + \overrightarrow{NB} + \overrightarrow{NC} = \vec{0}$.

b. Với các điểm M, N ở câu a, tìm các số p và q sao cho : $\overrightarrow{MN} = p\overrightarrow{AB} + q\overrightarrow{AC}$.

Bài 6. Cho lục giác ABCDEF. Gọi P, Q, R, S, T, U lần lượt là trung điểm các cạnh AB, BC, CD, DE, EF, FA. Chứng minh rằng hai tam giác PRT và QSU có trọng tâm trùng nhau.

Bài 7. Cho $\triangle ABC$. Gọi M là trung điểm của AB và N là một điểm trên cạnh AC sao cho $NA = 2NC$. Gọi K là trung điểm của MN. Phân tích vectơ $\overrightarrow{AK}$ theo hai vectơ $\overrightarrow{AB}$ và $\overrightarrow{AC}$.

Bài 8. Cho tam giác ABC, xác định các điểm M, N, P thỏa :

$$\overrightarrow{MB} = 2\overrightarrow{MC}, \overrightarrow{NA} + 3\overrightarrow{NC} = \vec{0}, \overrightarrow{PA} + \overrightarrow{PB} = \vec{0}.$$

a. Tính $\overrightarrow{PM}$, $\overrightarrow{PN}$ theo $\overrightarrow{AB}$ và $\overrightarrow{AC}$.

b. Chứng minh M, N, P thẳng hàng.

Bài 9. Cho tam giác ABC, hãy dựng các điểm P, I thỏa:

$$\text{a. } \overrightarrow{PA} + 2\overrightarrow{PB} = \overrightarrow{CB}; \quad \text{b. } \overrightarrow{IA} + \overrightarrow{IB} + \overrightarrow{IC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}$$

Bài 10. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho ba điểm A(-1 ; 3), B(4 ; 2), C(3 ; 5).

a. Chứng minh ba điểm A, B, C không thẳng hàng.

b. Tìm tọa độ điểm D sao cho $\overrightarrow{AD} = -3\overrightarrow{BC}$.

c. Tìm tọa độ điểm E sao cho O là trọng tâm của tam giác ABE.

CHƯƠNG II. TÍCH VÔ HƯỚNG CỦA HAI VECTO

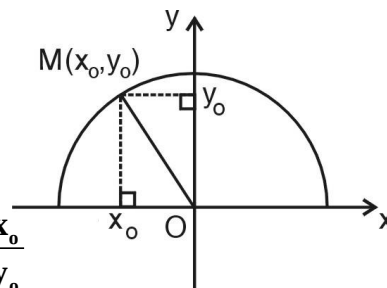
§1. GIÁ TRỊ LƯỢNG GIÁC CỦA MỘT GÓC BẤT KỲ TỪ 0° – 180°

I. KIẾN THỨC CƠ BẢN

1. Định nghĩa

Với mỗi góc α ($0^\circ \leq \alpha \leq 180^\circ$), ta xác định điểm M trên nửa đường tròn đơn vị sao cho $MOx = \alpha$. Giả sử $M(x_0, y_0)$, khi đó:

- **sin** của góc α là y_0 . Kí hiệu: $\sin \alpha = y_0$.
- **côsin** của góc α là x_0 . Kí hiệu: $\cos \alpha = x_0$.
- **tang** của góc α là $\frac{y_0}{x_0}$ ($x_0 \neq 0$). Kí hiệu: $\tan \alpha = \frac{y_0}{x_0}$.
- **côtang** của góc α là $\frac{x_0}{y_0}$ ($y_0 \neq 0$). Kí hiệu: $\cot \alpha = \frac{x_0}{y_0}$.



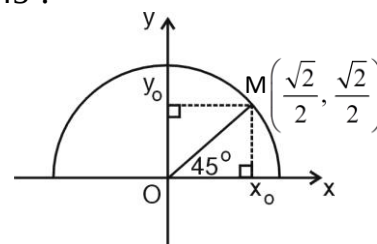
Các số **sin** α , **cos** α , **tan** α , **cot** α được gọi là *các giá trị lượng giác của góc α* .

Ví dụ 1. Tìm các giá trị lượng giác của góc 45° .

- Lấy điểm M trên nửa đường tròn đơn vị sao cho: $xOM = 45^\circ$.

- Khi đó tọa độ của điểm M $\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$

- Vậy: $\sin 45^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2}$, $\cos 45^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2}$, $\tan 45^\circ = 1$, $\cot 45^\circ = 1$



2. Tính chất

$\sin \alpha = \sin(180^\circ - \alpha)$	$\tan \alpha = -\tan(180^\circ - \alpha)$
$\cos \alpha = -\cos(180^\circ - \alpha)$	$\cot \alpha = -\cot(180^\circ - \alpha)$

Ví dụ 2. Tính giá trị lượng giác của góc 135° .

- $\sin 135^\circ = \sin(180^\circ - 135^\circ) = \sin 45^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2}$; $\cos 135^\circ = -\cos(180^\circ - 135^\circ) = -\cos 45^\circ = -\frac{\sqrt{2}}{2}$; $\tan 135^\circ = -\tan(180^\circ - 135^\circ) = -\tan 45^\circ = -1$;
- $\cot 135^\circ = -\cot(180^\circ - 135^\circ) = -\cot 45^\circ = -1$

3. Giá trị lượng giác của một số góc đặc biệt

α GT lượng giác	0°	30°	45°	60°	90°	120°	135°	150°	180°
sin α	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
cos α	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	-1
tan α	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$		$-\sqrt{3}$	-1	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$	0
cot α		$\sqrt{3}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	0	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$	-1	$-\sqrt{3}$	

Ví dụ 3. Tìm các giá trị lượng giác của góc: a) 60° b) 150°

Giải

$$\text{a. } \sin 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}; \quad \cos 60^\circ = \frac{1}{2}; \quad \tan 60^\circ = \sqrt{3}; \quad \cot 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

$$\text{b. } \sin 150^\circ = \frac{1}{2}; \quad \cos 150^\circ = -\frac{\sqrt{3}}{2}; \quad \tan 150^\circ = -\frac{\sqrt{3}}{3}; \quad \cot 150^\circ = -\sqrt{3}$$

II. BÀI TẬP ÁP DỤNG

DẠNG 1: TÍNH GIÁ TRỊ LƯỢNG GIÁC CỦA MỘT SỐ GÓC ĐẶC BIỆT

Phương pháp

- Tìm tọa độ điểm $M(x_0, y_0)$ sao cho $\angle xOM = \alpha$ trên nửa đường tròn đơn vị, ta có:

$$\sin \alpha = y_0; \quad \cos \alpha = x_0; \quad \tan \alpha = \frac{y_0}{x_0}; \quad \cot \alpha = \frac{x_0}{y_0}$$

- Sử dụng tính chất: (2 góc bù nhau)

$$\sin(180^\circ - \alpha) = \sin \alpha; \quad \cos(180^\circ - \alpha) = -\cos \alpha;$$

$$\tan(180^\circ - \alpha) = -\tan \alpha; \quad \cot(180^\circ - \alpha) = -\cot \alpha.$$

Bài 1. Tính giá trị của biểu thức:

$$A = \cos^2 120^\circ - \sin^2 150^\circ + 2\tan^2 135^\circ - \sin^2 90^\circ$$

$$B = \cos 20^\circ + \cos 40^\circ + \cos 160^\circ + \cos 140^\circ$$

Giải

$$A = \cos^2 120^\circ - \sin^2 150^\circ + 2\tan^2 135^\circ - \sin^2 90^\circ$$

$$= \left(-\frac{1}{2}\right)^2 - \left(\frac{1}{2}\right)^2 + 2 \cdot (-1)^2 - 1^2 = 1$$

$$B = \cos 20^\circ + \cos 40^\circ + \cos 160^\circ + \cos 140^\circ$$

$$= \cos 20^\circ + \cos 40^\circ + (-\cos 20^\circ) + (-\cos 40^\circ) = 0$$

DẠNG 2: CHỨNG MINH CÁC HỆ THỨC VỀ GIÁ TRỊ LƯỢNG GIÁC

Phương pháp

- Dựa vào định nghĩa giá trị lượng giác của góc α ($0 \leq \alpha \leq 180^\circ$).
- Dựa vào tính chất của tổng 3 góc của một tam giác bằng 180° .

Bài 2. Cho $\triangle ABC$. CMR: a) $\sin A = \sin(B + C)$ b) $\cos A = -\cos(B + C)$

Giải

a. CMR : $\sin A = \sin(B + C)$

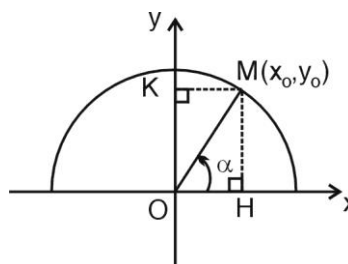
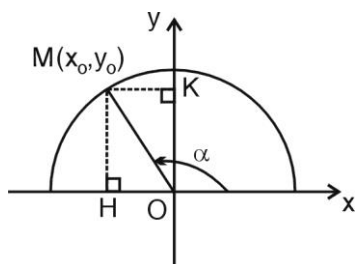
Trong $\triangle ABC$ ta có : $A + B + C = 180^\circ$

Do đó: $\sin(B + C) = \sin(180^\circ - A) = \sin A = VT$ (đpcm)

b. CMR: $\cos A = -\cos(B + C)$

$$VP = -\cos(B + C) = -\cos(180^\circ - A) = -(-\cos A) = \cos A = VT \text{ (đpcm)}$$

Bài 3. CMR: $\cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha = 1 \quad (0^\circ \leq \alpha \leq 180^\circ)$



- Nếu $\alpha = 0^\circ$ thì $\cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha = 1^2 + 0^2 = 1$
- Nếu $\alpha = 90^\circ$ thì $\cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha = 0^2 + 1^2 = 1$
- Nếu $\alpha = 180^\circ$ thì $\cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha = (-1)^2 + 0^2 = 1$
- Nếu $\alpha \neq 0^\circ, \alpha \neq 90^\circ, \alpha \neq 180^\circ$. Lấy điểm $M(x_0, y_0)$ trên nửa đường tròn đơn vị sao cho $\angle xOM = \alpha$. Gọi H, K lần lượt là hình chiếu vuông góc của M trên Ox, Oy.

Ta có: $\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = y_0^2 + x_0^2 = MH^2 + OH^2$

$\triangle OMH$ vuông tại H $\Rightarrow MH^2 + OH^2 = OM^2 = 1$

(do OM là bán kính của đường tròn đơn vị).

Vậy: $\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$ (đpcm)

Bài 4. Chứng Minh rằng: $\tan \alpha = \frac{1}{\cot \alpha} \quad (\alpha \neq 90^\circ)$

Trên nửa đường tròn đơn vị lấy điểm $M(x_0, y_0)$ sao cho $\angle xOM = \alpha$. Theo định nghĩa ta có: $\tan \alpha = \frac{y_0}{x_0}$; $\cot \alpha = \frac{x_0}{y_0}$ nên $\tan \alpha \cdot \cot \alpha = \frac{y_0}{x_0} \cdot \frac{x_0}{y_0} = 1 \Rightarrow \tan \alpha = \frac{1}{\cot \alpha}$ (đpcm)

BÀI TẬP**Bài 1.** Tính giá trị của các biểu thức:

a. $A = (2\sin 30^\circ + \cos 135^\circ - 3\tan 150^\circ)(\cos 180^\circ - \cos 60^\circ)$

b. $B = \sin^2 90^\circ + \cos^2 120^\circ + \cos^2 0^\circ - \tan^2 60^\circ + \cot^2 135^\circ$

c. $C = (\cos 150^\circ + \sin 150^\circ)(\cos 30^\circ + \sin 30^\circ)$

d. $D = \cos 0^\circ + \cos 10^\circ + \cos 20^\circ + \dots + \cos 170^\circ + \cos 180^\circ$

Bài 2. Đơn giản biểu thức:

a. $A = (a\sin 90^\circ + b\tan 45^\circ)(a\cos 0^\circ + b\cos 180^\circ)$

b. $B = 4a^2 \cdot \cos^2 60^\circ + 2ab \cdot \cos^2 180^\circ + \frac{4}{3} b^2 \cos^2 30^\circ$

c. $C = \cos 16^\circ + \cos 80^\circ + \cos 100^\circ + \cos 164^\circ$

d. $D = 2\sin(180^\circ - \alpha) \cdot \cot \alpha - \cos(180^\circ - \alpha) \cdot \tan \alpha \cdot \cot(180^\circ - \alpha)$

Bài 3. Cho $\triangle ABC$. Chứng minh rằng:

a. $\sin(A + B) = \sin C$

c. $\tan(A + B) = -\tan C$

b. $\cos(A + B) = -\cos C$

d. $\cot(A + B) = -\cot C$

Bài 4. Chứng minh rằng:

a. $1 + \tan^2 \alpha = \frac{1}{\cos^2 \alpha}$

b. $1 + \cot^2 \alpha = \frac{1}{\sin^2 \alpha}$

Bài 5. Cho $\tan \alpha = \sqrt{2}$. Tính giá trị của biểu thức: $E = \frac{3\sin \alpha - \cos \alpha}{\sin \alpha + \cos \alpha}$

§2. TÍCH VÔ HƯỚNG CỦA HAI VECTO

II. KIẾN THỨC CƠ BẢN

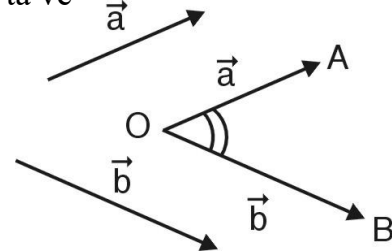
1. Góc giữa hai vector

Cho hai vector $\vec{a}$ và $\vec{b}$ khác $\vec{0}$. Từ điểm O nào đó ta vẽ $\overrightarrow{OA} = \vec{a}$ và $\overrightarrow{OB} = \vec{b}$. Khi đó,

góc AOB là góc giữa 2 vector $\vec{a}$ và $\vec{b}$.

Kí hiệu: $(\vec{a}, \vec{b})$

- Nếu $\vec{a} = \vec{0}$ hoặc $\vec{b} = \vec{0}$ thì $(\vec{a}, \vec{b})$ tùy ý
- Nếu $(\vec{a}, \vec{b}) = 90^\circ$ thì $\vec{a} \perp \vec{b}$



Ví dụ 1. Cho ΔABC vuông tại A và có $B = 60^\circ$. Khi đó,

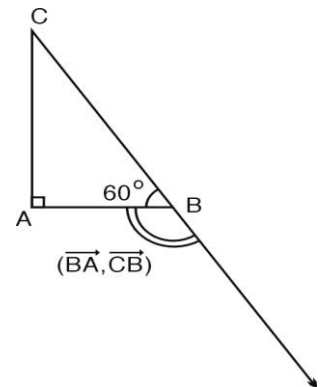
$$(\overrightarrow{BA}, \overrightarrow{BC}) = 60^\circ$$

$$(\overrightarrow{BA}, \overrightarrow{CB}) = 120^\circ$$

$$(\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{BC}) = (\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{CB}) = 30^\circ$$

$$(\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{CB}) = 150^\circ$$

$$(\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AB}) = 90^\circ$$



2. Tích vô hướng của hai vector

Tích vô hướng của hai vector là một số, kí hiệu $\vec{a} \cdot \vec{b}$ được xác định bởi:

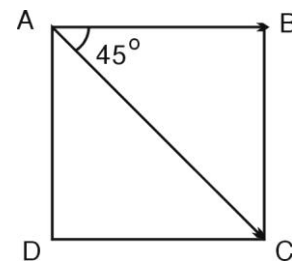
$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos(\vec{a}, \vec{b})$$

Ví dụ 2. Cho hình vuông ABCD cạnh a. Tính $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$; $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BC}$; $\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{DC}$

- $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = |\overrightarrow{AB}| \cdot |\overrightarrow{AC}| \cdot \cos(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})$

$$= a \cdot a\sqrt{2} \cdot \cos 45^\circ = a^2 \cdot \sqrt{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = a^2$$
- $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BC} = |\overrightarrow{AB}| \cdot |\overrightarrow{BC}| \cdot \cos(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{BC})$

$$= a \cdot a \cdot \cos 90^\circ = a^2 \cdot 0 = 0$$



- $\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{DC} = |\overrightarrow{AC}| \cdot |\overrightarrow{DC}| \cdot \cos(\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{DC}) = a \cdot a\sqrt{2} \cdot \cos 135^\circ = a^2 \cdot \sqrt{2} \cdot \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = -a^2$

❖ **Chú ý:** $\vec{a}^2 = \vec{a} \cdot \vec{a} = |\vec{a}|^2$

3. Tính chất

Với $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ tùy ý và $k \in \mathbb{R}$. Ta có:

- $\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{b} \cdot \vec{a}$

- $(k \cdot \vec{a}) \cdot \vec{b} = \vec{a} \cdot (k \cdot \vec{b}) = k \cdot (\vec{a} \cdot \vec{b})$
- $\vec{a} \cdot \vec{b} = 0 \Leftrightarrow \vec{a} \perp \vec{b}$
- $\vec{a} \cdot (\vec{b} \pm \vec{c}) = \vec{a} \cdot \vec{b} \pm \vec{a} \cdot \vec{c}$

4. Biểu thức tọa độ của tích vô hướng

Trong hệ tọa độ: $(0, \vec{i}, \vec{j})$ cho $\vec{a} = (x; y)$, $\vec{b} = (x'; y')$

- Tích vô hướng của 2 vector: $\vec{a} \cdot \vec{b} = x \cdot x' + y \cdot y'$
- Độ dài của vector $\vec{a}$: $|\vec{a}| = \sqrt{x^2 + y^2}$
- Góc giữa hai vector: $\cos(\vec{a}, \vec{b}) = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|} = \frac{x \cdot x' + y \cdot y'}{\sqrt{x^2 + y^2} \cdot \sqrt{x'^2 + y'^2}}$
($\vec{a} \neq \vec{0}, \vec{b} \neq \vec{0}$)
- Đặc biệt: $\vec{a} \perp \vec{b} \Leftrightarrow x \cdot x' + y \cdot y' = 0$

Ví dụ 3: Cho $\vec{a} = (3; -1)$, $\vec{b} = (2; 1)$, $\vec{c} = (5; m)$

- Tính tích vô hướng $\vec{a} \cdot \vec{b}$
- Tính độ dài của vector $\vec{a}$
- Tính góc giữa 2 vector $\vec{a}, \vec{b}$
- Tìm m để $\vec{a} \perp \vec{c}$

Giải

- $\vec{a} \cdot \vec{b} = 3 \cdot 2 + (-1) \cdot 1 = 6 - 1 = 5$
- $|\vec{a}| = \sqrt{9 + 1} = \sqrt{10}$
- $\cos(\vec{a}, \vec{b}) = \frac{3 \cdot 2 + (-1) \cdot 1}{\sqrt{9 + 1} \sqrt{4 + 1}} = \frac{5}{\sqrt{50}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow (\vec{a}, \vec{b}) = 45^\circ$
- $\vec{a} \perp \vec{c} \Leftrightarrow 3 \cdot 5 + (-1) \cdot m = 0 \Leftrightarrow m = 15$

5. Khoảng cách giữa hai điểm $A(x_A, y_A)$; $B(x_B, y_B)$

- $\overline{AB} = (x_B - x_A; y_B - y_A)$
- $AB = |\overline{AB}| = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}$

Ví dụ 4: Cho $A(3; 2)$, $B(-1; 5)$. Tính độ dài đoạn AB:

Giải

$$AB = |\overline{AB}| = \sqrt{(-1 - 3)^2 + (5 - 2)^2} = \sqrt{16 + 9} = \sqrt{25} = 5.$$

II. BÀI TẬP ÁP DỤNG

DẠNG 1: TÍNH TÍCH VÔ HƯỚNG CỦA HAI VECTOR

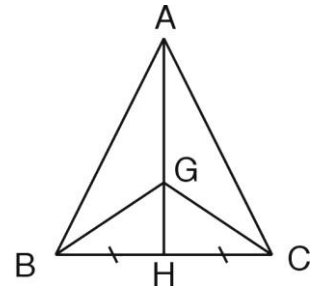
Phương pháp

- Xác định góc giữa 2 vector: $\vec{a}$ và $\vec{b}$
- Áp dụng công thức: $\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos(\vec{a}, \vec{b})$

Bài 1. Cho ΔABC đều cạnh a. H là trung điểm BC, G là trọng tâm của ΔABC .

- Tính $\overline{AB} \cdot \overline{AC}$; $\overline{AB} \cdot \overline{BC}$

- b. Tính $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AH}; \overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{AH}$
 c. Tính $\overrightarrow{GA} \cdot \overrightarrow{AC}; \overrightarrow{GB} \cdot \overrightarrow{GC}$

Giải

- a. Tính $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}; \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BC}$

$$\begin{aligned} \bullet \quad \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} &= |\overrightarrow{AB}| \cdot |\overrightarrow{AC}| \cdot \cos(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) = a \cdot a \cdot \cos 60^\circ = \frac{a^2}{2} \\ \bullet \quad \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BC} &= |\overrightarrow{AB}| \cdot |\overrightarrow{BC}| \cdot \cos(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{BC}) = a \cdot a \cdot \cos 120^\circ = -\frac{a^2}{2} \end{aligned}$$

- b. Tính $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AH}; \overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{AH}$

$$\begin{aligned} \bullet \quad \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AH} &= |\overrightarrow{AB}| \cdot |\overrightarrow{AH}| \cdot \cos(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AH}) = a \cdot \frac{a\sqrt{3}}{2} \cdot \cos 30^\circ = \frac{3a^2}{4} \\ \bullet \quad \overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{AH} &= 0 \text{ (do } \overrightarrow{AH} \perp \overrightarrow{BC}) \end{aligned}$$

- c. Tính $\overrightarrow{GA} \cdot \overrightarrow{AC}; \overrightarrow{GB} \cdot \overrightarrow{GC}$

$$\begin{aligned} \bullet \quad \overrightarrow{GA} \cdot \overrightarrow{AC} &= |\overrightarrow{GA}| \cdot |\overrightarrow{AC}| \cdot \cos(\overrightarrow{GA}, \overrightarrow{AC}) = \frac{a\sqrt{3}}{3} \cdot a \cdot \cos 150^\circ = -\frac{a^2}{2} \\ \bullet \quad \overrightarrow{GB} \cdot \overrightarrow{GC} &= |\overrightarrow{GB}| \cdot |\overrightarrow{GC}| \cdot \cos(\overrightarrow{GB}, \overrightarrow{GC}) = \frac{a\sqrt{3}}{3} \cdot \frac{a\sqrt{3}}{3} \cdot \cos 120^\circ = -\frac{a^2}{6} \end{aligned}$$

DẠNG 2: CHỨNG MINH CÁC ĐẲNG THỨC VỀ VECTƠ CÓ LIÊN QUAN ĐẾN TÍCH VÔ HƯỚNG

Phương pháp:

- Dùng quy tắc 3 điểm : $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$ hay $\overrightarrow{OA} - \overrightarrow{OB} = \overrightarrow{BA}$
- Sử dụng tính phân phối của tích vô hướng :

$$\vec{a}(\vec{b} + \vec{c}) = \vec{a} \cdot \vec{b} + \vec{a} \cdot \vec{c} \qquad \vec{a}(\vec{b} - \vec{c}) = \vec{a} \cdot \vec{b} - \vec{a} \cdot \vec{c}$$

Bài 2. Cho ΔABC với điểm M tùy ý. CMR:

- a. $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{MB} \cdot \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{MC} \cdot \overrightarrow{AB} = 0$
 b. $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = OM^2 - OA^2$ (với O là trung điểm AB).

Giải

$$\begin{aligned} \text{a. VT} &= \overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{MB} \cdot \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{MC} \cdot \overrightarrow{AB} \\ &= \overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{BC} + (\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{AB}) \cdot \overrightarrow{CA} + (\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{AC}) \cdot \overrightarrow{AB} \\ &= \overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{AB} \\ &= \overrightarrow{MA} \cdot (\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{AB}) + \overrightarrow{AB} \cdot (\overrightarrow{CA} + \overrightarrow{AC}) \\ &= \overrightarrow{MA} \cdot \vec{0} + \overrightarrow{AB} \cdot \vec{0} = 0 = VP \text{ (đpcm)} \\ \text{b. VT} &= \overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = (\overrightarrow{MO} + \overrightarrow{OA})(\overrightarrow{MO} + \overrightarrow{OB}) \\ &= (\overrightarrow{MO} + \overrightarrow{OA})(\overrightarrow{MO} - \overrightarrow{OA}) = \overrightarrow{MO}^2 - \overrightarrow{OA}^2 \end{aligned}$$

$$= MO^2 - OA^2 = VP \text{ (đpcm)}$$

☞ DẠNG 3: CHỨNG MINH SỰ VUÔNG GÓC CỦA HAI VECTO

☞ Phương pháp:

Sử dụng tính chất: $\vec{a} \perp \vec{b} \Leftrightarrow \vec{a} \cdot \vec{b} = 0$

Bài 3. Cho $\triangle ABC$ có góc A nhọn. Vẽ bên ngoài $\triangle ABC$ các tam giác $\triangle ABD$ và $\triangle ACE$ vuông cân tại A . Gọi M là trung điểm BC . CMR: $AM \perp DE$.

Giải

Chứng minh : $AM \perp DE$.

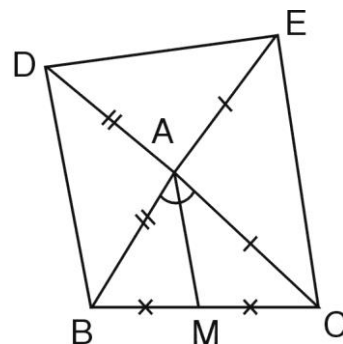
(Ta cần chứng minh : $\overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{DE} = 0$)

Ta có : $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} = 2\overrightarrow{AM}$ (quy tắc trung điểm)

$$\Rightarrow \overrightarrow{AM} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC})$$

$$\bullet \quad \overrightarrow{DE} = \overrightarrow{AE} - \overrightarrow{AD}$$

$$\begin{aligned} \overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{DE} &= \frac{1}{2}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}) \cdot (\overrightarrow{AE} - \overrightarrow{AD}) \\ &= \frac{1}{2}(\underbrace{\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AE}}_0 - \underbrace{\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AD}}_0 + \overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{AE} - \overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{AD}) \\ &= \frac{1}{2}(\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AE} - \overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{AD}) \\ &= \frac{1}{2}[AB \cdot AE \cdot \cos(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AE}) - AC \cdot AD \cdot \cos(\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD})] \\ &= \frac{1}{2}[AB \cdot AE \cdot \cos(90^\circ + A) - AC \cdot AD \cdot \cos(90^\circ + A)] \\ &= \frac{1}{2} \cdot 0 = 0 \text{ (vì } AB = AD, AE = AC) \\ &\Rightarrow \overrightarrow{AM} \perp \overrightarrow{DE} \Rightarrow AM \perp DE \text{ (đpcm)} \end{aligned}$$



☞ DẠNG 4: TÌM TỌA ĐỘ ĐIỂM-VECTƠ THỎA ĐIỀU KIỆN CHO TRƯỚC

☞ Phương pháp

- Sử dụng biểu thức tọa độ của tích vô hướng: $\vec{a}(x; y), \vec{b}(x'; y')$

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = x \cdot x' + y \cdot y'; \quad |\vec{a}| = \sqrt{x^2 + y^2}$$

$$\cos(\vec{a}, \vec{b}) = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|} = \frac{x \cdot x' + y \cdot y'}{\sqrt{x^2 + y^2} \cdot \sqrt{x'^2 + y'^2}}$$

$$AB = |\overrightarrow{AB}| = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}$$

Bài 4. Trong hệ tọa độ $(O, \vec{i}, \vec{j})$ cho điểm $A(-1; 2)$ và $B(5; 4)$

a. Tìm điểm M trên trục Ox sao cho $\triangle MAB$ vuông tại M .

- b. Tìm điểm N trên trục Oy sao cho ΔNAB cân tại N.

Giải

- a. Tìm điểm M trên trục Ox sao cho ΔMAB vuông tại M
 Vì $M \in Ox$ nên $M(m; 0)$. ΔMAB vuông tại M $\Leftrightarrow \overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{BM} = 0$
- $\overrightarrow{AM} = (m + 1, -2)$; $\overrightarrow{BM} = (m - 5, -4)$
 - $\overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{BM} = 0$
- $$\Leftrightarrow (m + 1)(m - 5) + 8 = 0 \Leftrightarrow m^2 - 4m + 3 = 0 \Leftrightarrow m = 1 \vee m = 3$$
- Vậy có 2 điểm $M_1(1; 0)$ và $M_2(3; 0)$
- b. Tìm điểm N trên trục Oy sao cho ΔNAB cân tại N
 Vì $N \in Oy$ nên $N(0; n)$. ΔNAB cân tại N $\Leftrightarrow AN = BN$
- $$\Leftrightarrow \sqrt{(0 + 1)^2 + (n - 2)^2} = \sqrt{(0 - 5)^2 + (n - 4)^2}$$
- $$\Leftrightarrow 1 + n^2 - 4n + 4 = 25 + n^2 - 8n + 16 \Leftrightarrow 4n = 36 \Leftrightarrow n = 9$$
- Vậy: $N(0, 9)$ thỏa yêu cầu bài toán.

BÀI TẬP

Bài 1. Tính góc giữa 2 vectơ $\vec{a}, \vec{b}$ biết:

- a. $\vec{a} = (1; -2)$ và $\vec{b} = (-1; -3)$
- b. $\vec{a} = (1; 2)$ và $\vec{b} = (1 - 2\sqrt{3}; \sqrt{3} + 2)$
- c. $\vec{a} = (\sqrt{2}; -\sqrt{3})$ và $\vec{b} = (3 - \sqrt{2}; \sqrt{3} + \sqrt{6})$

Bài 2. ΔABC là tam giác gì? Biết:

- a. $A(0; 3), B(-3; 1)$ và $C(1; -5)$
- b. $A(3; 2), B(-2; 1)$ và $C(4; -3)$

Bài 3. Trong mp tọa độ $(O, \vec{i}, \vec{j})$ cho $A(-1; -1), B(5; 6)$:

- a. Tìm M trên trục hoành để ΔABM cân tại M.
- b. Tìm N trên trục tung để ΔABN vuông tại N.
- c. Tìm tọa độ điểm C sao cho O là trọng tâm ΔABC .

Bài 4. Cho $\vec{a} = (\frac{1}{2}; -5)$ và $\vec{b} = (m; -4)$. Tìm m để:

- a. $\vec{a} \perp \vec{b}$
- b. $|\vec{a}| = |\vec{b}|$
- c. $\vec{a}$ cùng phương $\vec{b}$

Bài 5. Cho ΔABC vuông cân tại A, có $AB = AC = a$.

Tính: $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}; \overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BC}; \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BC}$

Bài 6. Cho ΔABC có $AB = 5\text{cm}, AC = 8\text{cm}, BC = 7\text{cm}$.

- a. Tính $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$ rồi suy ra giá trị góc A.

b. Tính $\overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{CB}$.

Bài 7. Cho 4 điểm A, B, C, D. CMR: $\overrightarrow{DA} \cdot \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{DB} \cdot \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{DC} \cdot \overrightarrow{AB} = 0$

Suy ra cách chứng minh định lý “3 đường cao của tam giác đồng quy”.

Bài 8. CMR : ΔABC vuông tại A $\Leftrightarrow \overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BC} = AB^2$

Bài 9. Cho ΔABC có 3 trung tuyến AD, BE, CF. CMR:

$$\overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{BE} + \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CF} = 0$$

Bài 10. Cho ΔABC có A(5; 6), B(4; -1), C(-4; 3). Tìm tọa độ:

- Trọng tâm G của ΔABC .
- Trục tâm H của ΔABC .
- Chân đường cao A' của đường cao kẻ từ A.
- Tìm tọa độ tâm I của đường tròn ngoại tiếp ΔABC .
- CMR: G, H, I thẳng hàng.

Bài 11. Cho ΔABC với A(1; 5), B(-4; -5), C(4, -1).

- Tìm tọa độ chân đường phân giác trong và ngoài A.
- Tìm tọa độ tâm J của đường tròn nội tiếp ΔABC .

Bài 12. Cho đoạn AB cố định $AB = 2a$, $k \in \mathbb{R}$. Tìm tập hợp điểm M thỏa:

- $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = k^2$
- $MA^2 - MB^2 = k^2$

Bài 13. Cho 2 điểm M, N nằm trên đường tròn đường kính $AB = 2R$. Gọi I là giao điểm AM và BN:

$$\text{a. CMR: } \overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{AI} = \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AI}, \overrightarrow{BN} \cdot \overrightarrow{BI} = \overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BI}$$

$$\text{b. Tính: } \overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{AI} + \overrightarrow{BN} \cdot \overrightarrow{BI} \text{ theo R.}$$

Bài 14. Cho 2 đường thẳng AB và CD cắt nhau tại M.

$$\text{CMR: A, B, C, D cùng thuộc đường tròn} \Leftrightarrow \overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = \overrightarrow{MC} \cdot \overrightarrow{MD}.$$

Bài 15. Cho ΔABC , $M \in BC$ sao cho $\overrightarrow{MB} \cdot \overrightarrow{MC} = MA^2$.

CMR: MA là tiếp tuyến của đường tròn ngoại tiếp ΔABC .

ÔN TẬP CHƯƠNG II



I. KIẾN THỨC CƠ BẢN

1. Tích vô hướng của 2 vector: $\vec{a}, \vec{b}$

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos(\vec{a}, \vec{b})$$

2. Biểu thức tọa độ của tích vô hướng 2 vector : $\vec{a} = (x; y), \vec{b} = (x'; y')$

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = x \cdot x' + y \cdot y'$$

3. Độ dài của vector: $\vec{a} = (x; y)$

$$|\vec{a}| = \sqrt{x^2 + y^2}$$

4. Góc giữa 2 vector: $\vec{a} = (x; y), \vec{b} = (x'; y')$

$$\cos(\vec{a}, \vec{b}) = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|} = \frac{x \cdot x' + y \cdot y'}{\sqrt{x^2 + y^2} \cdot \sqrt{x'^2 + y'^2}}$$

5. Khoảng cách giữa 2 điểm $A(x_A; y_A), B(x_B; y_B)$

$$\begin{aligned} \overrightarrow{AB} &= (x_B - x_A; y_B - y_A) \\ AB &= |\overrightarrow{AB}| = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2} \end{aligned}$$

BÀI TẬP

Bài 1. Tính giá trị của biểu thức:

a. $A = \sin 120^\circ + 2\sin 150^\circ - \cos 150^\circ - \cot 135^\circ$

b. $B = \cos 5^\circ + \cos 10^\circ + \cos 15^\circ + \dots + \cos 170^\circ + \cos 175^\circ + \cos 180^\circ$

Bài 2. ABC vuông tại C, có $AC = 9, BC = 5$. Tính $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$

Bài 3. Cho ABC biết $AC = 8, CB = 7, AB = 5$

a. Tính $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$

b. Tính $\overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{CB}$

c. Gọi D là điểm trên cạnh CA sao cho $CD = 3$. Tính $\overrightarrow{CD} \cdot \overrightarrow{CB}$

Bài 4. Cho ABC, M là trung điểm BC:

CMR: $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = MA^2 - MB^2$.

Bài 5. Cho hình chữ nhật ABCD, M là điểm tùy ý. CMR:

a. $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MC} = \overrightarrow{MB} \cdot \overrightarrow{MD}$

b. $MA^2 + \overrightarrow{MB} \cdot \overrightarrow{MD} = 2 \cdot \overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MO}$ (O là tâm hình chữ nhật)

Bài 6. Cho ABC cân tại A. Gọi I là trung điểm BC và H là hình chiếu vuông góc của I trên AC, M là trung điểm IH. CMR: $AM \perp BH$

Bài 7. Cho ABC biết $A(5; 6)$, $B(4; -1)$, $C(-4; 3)$

- Tìm tọa độ trọng tâm G , trục tâm H và tâm I của đường tròn ngoại tiếp ABC.
- CMR: I, G, H thẳng hàng.

Bài 8. Cho ABC có $A(-2; 2)$, $B(6; 6)$, $C(2; -2)$

- CMR: A, B, C không thẳng hàng.
- Tìm tọa độ điểm D để ABCD là hình bình hành.
- Tìm điểm M thuộc trục $x'Ox$ để ABM vuông tại B.
- ABC là tam giác gì?
- Tìm tọa độ trục tâm H của ABC.

Bài 9. Cho hai điểm $A(-3; 2)$, $B(4; 3)$. Tìm tọa độ của

- Điểm $M \in Ox$ sao cho $\triangle MAB$ vuông tại M .
- Điểm $N \in Oy$ sao cho $NA = NB$.
- Điểm $I \in Oy$ sao cho 3 điểm A, I, B thẳng hàng.
- Điểm C sao cho ABC vuông cân tại C .